

۱۴۰۲ نوبت دوم خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۳	۱۳	۱۰	۱۴	۱	۱۸	۲۱
فیزیک	۸	۱۰	۱۷	-	۴	۲۵	۶
شیمی	۶	۶	۹	۹	۵	۱۸	۷

ریاضیات

۱- گزینه ۳

درس نامه اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$ac = b^2$$

روش گام سه جمله اول دنباله حسابی را $a, a+d, a+2d$ در نظر می گیریم.

این سه جمله، سه جمله متوالی دنباله هندسی هم هستند، پس با توجه به درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$a \times (a+2d) = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + 2ad = a^2 + 2ad + d^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 0 \Rightarrow d = 0$$

گام $d = 0$ است، پس قدرنسبت جملات دنباله حسابی صفر است و همه جملات آن با هم برابر می شوند:

$$a, a+d, a+2d, \dots \xrightarrow{d=0} a, a, a, \dots$$

گام به گفته سؤال، جملات دنباله حسابی (همین جملات بالا که همگی برابر a هستند)،

جملات دنباله هندسی هم هستند که واضح است قدرنسبت دنباله هندسی $r = 1$ می شود،

$$\text{پس } r+d = 1+0 = 1 \text{ است.}$$

روش

نکته تنها دنباله ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله ثابت است که در آن

قدرنسبت جملات دنباله حسابی صفر و قدرنسبت جملات دنباله هندسی ۱ است:

$$a, a, a, \dots \text{ دنباله ای که هم حسابی و هم هندسی است}$$

با توجه به نکته بالا، $d = 0$ و $r = 1$ است که $r+d = 1$ می شود.

۲- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر مطابق شکل زیر، دو نقطه با عرض یکسان روی یک سهمی داشته

باشیم، طول رأس سهمی (x_S)

برابر میانگین طول آن دو نقطه

می شود؛ یعنی:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

۲ اگر مختصات رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله سهمی به صورت زیر می شود:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

۳ برای این که ببینیم یک سهمی، محور y ها را با چه عرضی قطع می کند، کافی است به

جای x های سهمی قرار دهیم صفر و مقدار y را محاسبه کنیم.

گام به گفته سؤال دو نقطه $A(1, \beta)$ و $B(-5, \beta)$ روی سهمی قرار دارند؛ عرض

این دو نقطه یکسان است، پس طبق مورد (۱) درس نامه، طول رأس این سهمی می شود

$$x_S = \frac{-5+1}{2} = -2$$

گام عرض رأس این سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است، پس مختصات رأس سهمی $S(-2, -\frac{1}{4})$

می شود. حالا طبق مورد (۲) درس نامه، معادله سهمی به صورت زیر می شود:

$$y = a(x+2)^2 - \frac{1}{4}$$

گام سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع می کند، پس اگر در معادله سهمی

به جای x قرار دهیم صفر، y برابر $\frac{3}{4}$ می شود (طبق مورد (۳) درس نامه):

$$y = a(x+2)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{x=0, y=\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = a \times 4 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین معادله سهمی به صورت مقابل است:

گام حالا برای این که مقدار β را به دست آوریم، کافی است در معادله سهمی به جای

x قرار دهیم ۱ یا -5 : (چون سهمی از دو نقطه $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ می گذرد).

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{1}{4} = 4$$

۳- گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت یا حداقل یکی از A و

B تهی است یا A و B برابرند:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow (A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset \text{ یا } A = B)$$

۲ دو مجموعه وقتی برابرند که تک تک اعضایشان مساوی هم باشند.

گام به گفته سؤال $A \times B = B \times A$ است، پس طبق مورد (۱) درس نامه یا باید حداقل

یکی از A و B تهی باشند یا $A = B$ باشد. واضح است که $A = \{\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, 5\}$ و $B = \{z, t, 1, 4\}$

هیچ کدام نمی توانند تهی باشند، بنابراین $A = B$ است: (*)

$$\{\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, 5\} = \{z, t, 1, 4\}$$

گام حالا خوب به تساوی مجموعه ای (*) نگاه کنید. در مجموعه سمت چپ، اعداد ۱

و ۴ را کم داریم، پس یکی از $\frac{x}{3}$ و $\frac{y}{3}$ باید ۴ باشد و دیگری ۱. در مجموعه سمت راست دو

مشکل داریم؛ یکی کمبود عدد ۵ و دیگری داشتن یک عضو اضافی، برای برطرف کردن این

دو مشکل یکی از z و t را ۵ و دیگری را تکراری انتخاب می کنیم (مثلاً اگر $z = 5$ باشد، t

می تواند ۱ یا ۴ یا ۵ باشد).

گام اگر قرار باشد یکی از $\frac{x}{3}$ و $\frac{y}{3}$ ۴ باشد و دیگری ۱، دو حالت داریم:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = 1 \\ \frac{y}{3} = 4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 12), \begin{cases} \frac{x}{3} = 4 \\ \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (12, 3)$$

گام هر دو حالت را جداگانه بررسی می کنیم:

♦ $(x, y) = (3, 12)$ ، در این حالت $x+y = 15$ می شود، پس برای این که

$x+y+z+t > 20$ شود باید $z+t > 6$ باشد که در سه حالت $(5, 4)$ یا $(4, 5)$ یا

$(5, 5)$ این اتفاق می افتد؛ بنابراین تا این جا ۳ جواب برای مسئله پیدا کردیم.

♦ $(x, y) = (12, 3)$ ، در این حالت $x+y = 15$ می شود، پس برای این که

$x+y+z+t > 20$ بشود، باید $z+t > 9$ باشد؛ این اتفاق فقط در حالتی می افتد که

$(z, t) = (5, 5)$ باشد؛ پس در این حالت هم یک جواب برای مسئله پیدا شد. بنابراین در

کل مسئله $3+1=4$ جواب دارد.

۴- گزینه ۱

استراتژی اول سعی می کنیم گزینه ها را ساده تر بنویسیم. برای این کار به دنبال

گزاره هایی می گردیم که ارزششان کاملاً معلوم است. بعد از این کار، سیاست حذف گزینه را

پیش می گیریم؛ یعنی می بینیم کدام گزینه ارزشش طبق میل سطرهای جدول نیست. این

سیاست را تا جایی ادامه می دهیم که سه گزینه حذف شود.



گام ۱ به همین ترتیب اگر سطر ششم جدول را هم کنترل کنیم، حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر Q درست ولی P و r نادرست باشند؛ X باید درست شود:

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

$$\equiv \underbrace{(r \Rightarrow (p \vee q))}_{\text{د}} \Rightarrow \underbrace{[(p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]}_{\text{ن}} \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن} \quad \times$$

همان‌طور که می‌بینید، اتفاقی که در سطر ششم می‌خواستیم نیفتاد و این گزینه هم حذف می‌شود؛ پس تنها گزینه باقی‌مانده، یعنی ۱ جواب است.

مشاوره سر جلسه کنکور برای بار اول باید از این سؤال رد شوید، چون هم بسیار وقت‌گیر و هم احتمال اشتباه کردنتان زیاد است.

۵- گزینه ۲

استراتژی اول طرفین معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ را بر ۳ تقسیم کنید، بعد عبارت $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ را به صورت $(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - 4\alpha) = 7$ بنویسید تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند، در این صورت جمع (S) و ضرب ریشه‌ها (P) از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}, \quad P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$$

همین‌طور $\alpha^2 + \beta^2$ را هم می‌توانیم بر حسب P و S بنویسیم:

۲ برای به دست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ دو حالت خاص داریم:

الف) اگر $A + B + C = 0$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و ریشه دیگر $x = \frac{C}{A}$ است.

ب) اگر $A + C = B$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و ریشه دیگر $x = -\frac{C}{A}$ است.

گام ۱ اول معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3x^2 - 12x - a = 0 \xrightarrow{\div 3} \underbrace{1}_{A}x^2 - \underbrace{4}_{B}x - \underbrace{\frac{a}{3}}_{C} = 0 \quad (*)$$

طبق مورد (۱) درس‌نامه، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله بالا، برابر است با:

$$S = -\frac{B}{A} = -\frac{-4}{1} = 4, \quad P = \frac{C}{A} = -\frac{a}{3}$$

گام ۲ α و β ریشه‌های معادله (*) هستند، پس حق داریم آن‌ها را در معادله (*) جای‌گذاری کنیم؛ ما این‌جا α را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^2 - 4x - \frac{a}{3} = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 4\alpha - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = \frac{a}{3}$$

گام ۳ حالا به سراغ معادله $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ می‌رویم:

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7 \Rightarrow \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}_{S^2 - 2P} + (\alpha^2 - 4\alpha) = 7$$

گام ۴ با جای‌گذاری نتایج به‌دست‌آمده از گام‌های (۱) و (۲) در معادله بالا داریم:

$$16 - 2\left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{a}{3} = 7 \Rightarrow 16 + \frac{2a}{3} + \frac{a}{3} = 7 \Rightarrow 16 + a = 7 \Rightarrow a = -9$$

گام ۵ در (*) به جای a قرار می‌دهیم -9 :

$$x^2 - 4x - \frac{-9}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

بنابراین نسبت مقدار a به ریشه بزرگ‌تر معادله، $-\frac{9}{3} = -3$ است.

(فقط حواستان باشد که معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ ساده‌شده معادله اول یعنی معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ هست.)

درس‌نامه ۱ جدول ارزش انواع ترکیب گزاره‌ها را برای دو گزاره P و Q در جدول زیر ببینید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
این گزاره فقط وقتی نادرست می‌شود که هر دو گزاره نادرست باشند.	این گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.	این گزاره فقط وقتی نادرست است که گزاره اول (P) درست ولی گزاره دوم (Q) نادرست باشد.

۲ به کمک جدول بالا می‌توانیم دو هم‌ارزی زیر را بنویسیم:

$$p \Rightarrow p \equiv \text{د}, \quad \text{د} \wedge \text{د} \equiv \text{د}$$

گام ۱ طبق استراتژی، اول گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم در ۱ و ۲ گزاره $p \Rightarrow p$ همیشه درست است، پس این گزینه‌ها را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

ساده‌سازی ۱

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \sim r)) \equiv (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r)$$

ساده‌سازی ۲

$$(\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r)) \equiv (\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim q \wedge r)$$

گام ۲ حالا شروع به حذف گزینه‌ها می‌کنیم. سطر دوم جدول می‌گوید، وقتی P و Q درست ولی r نادرست باشد، ارزش X باید درست شود. ببینیم در کدام گزینه‌ها چنین اتفاقی نمی‌افتد:

$$1 \quad (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow (\text{د} \wedge \text{ن}) \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن} \quad \checkmark$$

$$2 \quad (\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow (\text{ن} \wedge \text{د}) \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن} \quad \times$$

همین‌جا ۲ را حذف می‌کنیم.

$$3 \quad (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

$$\equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow [(\text{د} \Rightarrow \text{د}) \wedge \text{د}] \equiv \text{د} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{د} \quad \checkmark$$

$$4 \quad ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim((p \wedge r) \Rightarrow q)]$$

$$\equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow [(\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow \sim(\text{د} \Rightarrow \text{د})] \equiv \text{ن} \Rightarrow [\text{د} \Rightarrow \text{ن}] \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \quad \checkmark$$

گام ۳ در ادامه اگر سطر سوم جدول را کنترل کنیم، حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر گزاره‌های P و Q درست و r نادرست باشد، X هم باید نادرست باشد که چنین اتفاقی برای ۴ نمی‌افتد.

$$4 \quad ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim((p \wedge r) \Rightarrow q)]$$

$$\equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow [(\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow \sim(\text{د} \Rightarrow \text{د})] \equiv \text{د} \Rightarrow [\text{د} \Rightarrow \text{ن}] \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \quad \times$$



گام ۱ شیب خط $x - 3y = 4$ (یا همان $x - 3y - 4 = 0$) برابر $\frac{1}{3}$ و شیب خط

$x + 4y = -3$ (یا همان $x + 4y + 3 = 0$) برابر $-\frac{1}{4}$ است. شیب این دو خط با هم برابر نیست؛ پس این دو، معادله خط دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع هستند؛ بنابراین شکل مسئله به صورت مقابل است:

گام ۲ نقطه $(-6, 3)$ روی هیچ کدام از دو خط

$$x - 3y - 4 = 0 \xrightarrow{(-6, 3)} -6 - 9 - 4 = -19 \neq 0$$

$$x + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{(-6, 3)} -6 + 12 + 3 = 9 \neq 0$$

بنابراین نقطه $(-6, 3)$ ، مختصات رأس C (که روی هیچ کدام از این دو خط نیست) می شود.

گام ۳ فاصله نقطه $C(-6, 3)$ را از دو ضلع AB و AD به دست می آوریم تا اندازه دو ارتفاع متوازی الاضلاع حاصل شود:

$$|ax_0 + by_0 + c| \begin{cases} \xrightarrow{1x-3y-4=0, (-6,3)} \frac{|-6-(3 \times 3)-4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{\sqrt{10}} \\ \xrightarrow{1x+4y+3=0, (-6,3)} \frac{|-6+(4 \times 3)+3|}{\sqrt{1+16}} = \frac{9}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

واضح است که طول ارتفاع بزرگتر، $\frac{19}{\sqrt{10}}$ است. پس بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع

متوازی الاضلاع برابر نصف طول این ارتفاع، یعنی $\frac{19}{2\sqrt{10}}$ می شود.

۸- گزینه ۲

استراتژی با جای گذاری $y = 7/2$ در خط $\Delta y - 10x = 12$ ، $x = 2/4$ می شود؛

پس می توانیم بگوییم طول نقطه برخورد f^{-1} با خط $\Delta y - 10x = 12$ ، برابر $2/4$ و در نتیجه مختصات نقطه تقاطع $(2/4, 7/2)$ است؛ این یعنی $f^{-1}(2/4) = 7/2$ می شود.

حالا با حل معادله $f(7/2) = 2/4$ مقدار m بعد از آن $f(\frac{7}{m})$ به دست می آید.

درس نامه اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، $f(\beta) = \alpha$ می شود.

گام ۱ ابتدا برای درک بهتر یک شکل فرضی رسم می کنیم.

عرض نقطه تقاطع، $y = 7/2$ است؛ نقطه تقاطع روی خط $\Delta y - 10x = 12$ قرار دارد، پس با جای گذاری $y = 7/2$ در این خط، طول نقطه تقاطع به دست می آید:

$$\Delta y - 10x = 12 \xrightarrow{y=7/2} \Delta \times \frac{7}{2} - 10x = 12 \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = 2/4$$

بنابراین مختصات نقطه تقاطع $(2/4, 7/2)$ است.

گام ۲ از نقطه $(2/4, 7/2)$ می گذرد، پس $f^{-1}(2/4) = 7/2$ می شود. حالا طبق

درس نامه، از این که $f^{-1}(2/4) = 7/2$ است، نتیجه می گیریم که $f(7/2) = 2/4$ می شود:

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx-1} \Rightarrow f(7/2) = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2m-1} = 2/4$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \sqrt{7/2} \times (7/2m-1) = 2/4 \Rightarrow \sqrt{7/2} (7/2m-1) = 1/4$$

$$\Rightarrow 7/2m-1 = 0/8 \Rightarrow 7/2m = 1/8 \Rightarrow m = \frac{1/8}{7/2} = \frac{1}{28}$$

بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{28}x-1}$ است.

گام ۳ در آخر مقدار $f(\frac{4}{m})$ را محاسبه می کنیم:

$$f(\frac{4}{m}) = f(\frac{4}{1/28}) = f(112) = \sqrt{112} \sqrt{\frac{1}{28} \times 112 - 1} = 4\sqrt{3}$$

مشاوره رسم یک شکل فرضی برای حل سوالات، عموماً به ما کمک می کند تا درک بهتری از سؤال داشته باشیم و بتوانیم آن را ساده تر حل کنیم.

۹- گزینه ۳

استراتژی باید از تغییر متغیر $t = x^2 - 2x$ کمک بگیرید.

درس نامه ۱ روش روسی برای حل معادله درجه دوم؛ برای به دست آوردن ریشه های معادله درجه دومی مثل $ax^2 + bx + c = 0$ که ضریب x^2 برابر ۱ نیست (و با تجزیه به راحتی حل نمی شود) می توانیم از این تکنیک استفاده کنیم که ابتدا a را در C ضرب کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود، یعنی:

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + ac = 0$$

حالا باید ریشه های معادله $x^2 + bx + ac = 0$ را با تجزیه به دست آوریم و هر دو ریشه به دست آمده را تقسیم بر a کنیم تا ریشه های معادله اصلی، یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ به دست آیند.

۲ در معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ داریم:

$$\text{ضرب ریشه ها } P = \frac{C}{A} \quad \text{جمع ریشه ها } S = -\frac{B}{A}$$

گام ۱ اول به جای $(2-x)^2$ می نویسیم $(x-2)^2$ و بعد مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2(x-2)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 4}{(x(x-2))^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2 - 2x) + 4}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{4}{9}$$

گام ۲ از تغییر متغیر $t = x^2 - 2x$ کمک می گیریم:

$$\frac{2t+4}{t^2} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\div 2} \frac{t+2}{t^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow 20t^2 = 9t + 18 \Rightarrow 20t^2 - 9t - 18 = 0$$

گام ۳ برای حل معادله بالا، از روش روسی کمک می گیریم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} 20t^2 - 9t - 18 = 0 \Rightarrow t^2 - 9t - 36 = 0 \Rightarrow (t-24)(t+15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=24 \\ t=-15 \end{cases}$$

بنابراین ریشه های معادله $20t^2 - 9t - 18 = 0$ برابر هستند با:

$$\begin{cases} t = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} \\ t = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

گام ۴ به جای t قرار می دهیم $x^2 - 2x$:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = \frac{6}{5} \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{6}{5} = 0 \xrightarrow{\Delta = 4 + \frac{24}{5} > 0} \text{جمع ریشه ها} = +2 \\ x^2 - 2x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\Delta = 4 - 3 = 1 > 0} \text{جمع ریشه ها} = +2 \end{cases}$$

بنابراین جمع ریشه های معادله، $2+2=4$ می شود.

۷- گزینه ۱

استراتژی اول فاصله نقطه $(-6, 3)$ از دو خط $x - 3y = 4$ و $x + 4y = -3$ را

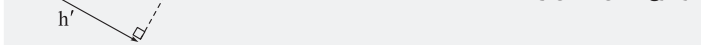
محاسبه کنید، بعد طبق مورد (۳) درس نامه می توانید بگویید، جواب، نصف اندازه فاصله بزرگتر می شود.

درس نامه ۱ خط $ax + by = c$ از نقطه $A(x_0, y_0)$ می گذرد، اگر و تنها اگر $ax_0 + by_0 = c$ شود.

۲ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۳ در هر متوازی الاضلاع، وسط قطر، همان مرکز متوازی الاضلاع است که فاصله آن تا هر ضلع، برابر نصف اندازه ارتفاع وارد بر آن ضلع است؛ برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



۴ شیب خط $ax + by = c$ برابر است با:

$$\frac{\text{قربنه ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{a}{b}$$



۹- گزینه ۳



استراتژی اول توجه کنید که $\frac{12}{5}$ درصد، یعنی $\frac{1}{8}$ ؛ پس در هر هفته عنصر $\frac{1}{8}$ جرمش را از دست می‌دهد و $\frac{7}{8}$ جرمش می‌ماند. پس برای محاسبه خواسته سؤال اول باید معادله $(\frac{7}{8})^n = \frac{1}{2}$ را حل کنید. بعد جواب به دست آمده را در ۷ ضرب کنید تا خواسته سؤال به دست آید.

درس نامه ۱ برای از بین بردن توان در معادلات نمایی، می‌توانیم از طرفین در مبنای دلخواه، مثلاً x ، لگاریتم بگیریم که در این صورت، توان تبدیل به ضریب می‌شود:

$$a^m = b^n \Rightarrow \log_x a^m = \log_x b^n \Rightarrow m \log_x a = n \log_x b$$

۲ بعضی از قوانین لگاریتم به شکل زیرند:

الف) $\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

ب) $\log_a 1 = 0$

پ) $\log ab = \log a + \log b$

ت) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

ث) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

گام ۱ این عنصر در هر هفته، $\frac{12}{5}$ درصد از جرم خود را از دست می‌دهد، یعنی جرم آن $1 - \frac{12}{100} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ برابر می‌شود، بنابراین پس از n هفته، $(\frac{7}{8})^n$ برابر از جرم عنصر باقی خواهد ماند.

گام ۲ برای این که بینیم پس از چند هفته $\frac{1}{2}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند، کافی است معادله $(\frac{7}{8})^n = \frac{1}{2}$ را حل کنیم. از دو طرف این معادله در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. (طبق مورد (۱) درس نامه):

$$\begin{aligned} (\frac{7}{8})^n = \frac{1}{2} &\Rightarrow \log_3 (\frac{7}{8})^n = \log_3 \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{قسمت (الف) درس نامه}} n \log_3 \frac{7}{8} = \log_3 \frac{1}{2} \\ &\xrightarrow{\text{قسمت (ت) درس نامه}} n (\log_3 7 - \log_3 8) = \log_3 1 - \log_3 2 \\ &\xrightarrow{\text{قسمت (الف) درس نامه}} n (\log_3 7 - 3 \log_3 2) = -\log_3 2 \quad (*) \end{aligned}$$

گام ۳ حالا سراغ داده‌های سؤال می‌رویم:

$$\begin{cases} \log_3 2 = \frac{1}{1/6} = \frac{1}{16} = \frac{1}{16} = \frac{5}{8} \\ \log_3 7 = \frac{1}{0/6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{قسمت (ث) درس نامه}} \begin{cases} \log_3 2 = 1/6 \\ \log_3 7 = 0/6 \end{cases}$$

گام ۴ در آخر مقادیر به دست آمده را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow n (\frac{5}{3} - 3 \times \frac{5}{8}) = -\frac{5}{3} \Rightarrow \cancel{\frac{5}{24}} n = \cancel{\frac{5}{3}} \Rightarrow n = \frac{24}{3} = 8$$

تله هواسن باشه یهو الان نزن! ۱. تعداد روز رو می‌فواهیم، نه هفته!

بنابراین پس از ۸ هفته یا همان $8 \times 7 = 56$ روز، $\frac{1}{2}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند.

۱۰- گزینه ۴



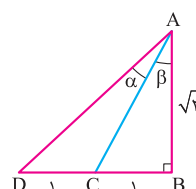
درس نامه فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

گام ۱ ابتدا فرض کنید $\hat{BAC} = \beta$ باشد. در

$$\tan \hat{BAC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \hat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



گام ۲ حالا با استفاده از درس نامه داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \tan \alpha \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} - \tan \alpha \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

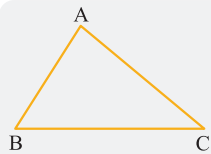
روش ۲ با توجه به این که $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و β حاده است، می‌توانیم بگوییم $\beta = \frac{\pi}{6}$. حالا

با جای‌گذاری $\beta = \frac{\pi}{6}$ در تساوی (*) داریم:

$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \tan \alpha \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

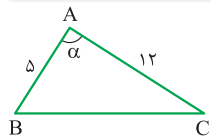
ادامه مانند روش اول.

۱۱- گزینه ۱



درس نامه مساحت یک مثلث را می‌توانیم با استفاده از سینوس به دست آوریم؛ مثلاً برای مساحت مثلث مقابل، می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$



گام ۱ ابتدا یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم: فرض کنید $AB = 5$ ، $AC = 12$ و زاویه بین این دو، یعنی $\hat{A}$ برابر α است.

گام ۲ با کمک درس نامه، مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow 15 = \frac{5 \times 12 \times \sin \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = 6 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

گام ۳ می‌دانیم در هر مثلث، هر زاویه بین صفر و 180° درجه است؛ پس α هم بین صفر

و 180° است که می‌تواند برابر $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{6}$ باشد (سینوس $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ برابر $\frac{1}{2}$ است)، پس

اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار α برابر $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$ است.

۱۲- گزینه ۲



درس نامه

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

۱

۲ فرمول‌های طلایی نسبت‌های مثلثاتی دوالفایی به شکل زیرند:

$$1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha, \quad 1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

۳ برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

۴ نسبت‌های مثلثاتی $\alpha + \frac{\pi}{4}$ به شکل زیرند:

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha$	$\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\sin \alpha$
$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\cot \alpha$	$\cot(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\tan \alpha$



گام ۳ حداکثر مقدار این تابع برابر ۶ و حداقل مقدار آن برابر صفر است:

$$\begin{aligned} \text{مورد (۶-الف) درس نامه} \quad & \left| \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \left| \frac{b}{2} \right| \right| = 6 \\ & \left| \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \left| \frac{b}{2} \right| \right| = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب مثبت است} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} &= 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} &= 0 \Rightarrow \frac{2}{a} - b = 0 \Rightarrow b = 6 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه تابع f به شکل زیر است:

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \sin(2cx) = 6 - 3 + 3 \sin\left(\frac{2x}{9}\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2x}{9}\right)$$

گام ۴ مقدار $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ را می‌خواهیم:

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) = 3 + 3 \times \frac{1}{2} = 3 + 1.5 = 4.5$$



۱۳- گزینه ۴

درس نامه ۱ فرمول سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

۲ برخی از نسبت‌های مثلثاتی دوالفایی به شکل زیرند:

$$\text{الف) } \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} \quad \text{ب) } \begin{cases} 1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x \\ 1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x \end{cases} \quad \text{(نسبت‌های طلایی)}$$

گام ۱ ابتدا با کمک مورد (۱) درس نامه، $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{با } \times 2 \Rightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{(I)}$$

گام ۲ طرفین رابطه بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{3 \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x} - \frac{2 \sqrt{3} \sin x \cos x}{\sin(2x)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x + 1 - \sqrt{3} \sin(2x)}{2} = \frac{4}{3} \quad \text{(II)}$$

گام ۳ از نسبت‌های مثلثاتی دوالفایی (نسبت‌های طلایی) می‌دانیم $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$

است، پس به جای $2 \sin^2 x$ در (II)، قرار می‌دهیم $1 - \cos(2x)$:

$$1 - \cos(2x) + 1 - \sqrt{3} \sin(2x) = \frac{4}{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \sin(2x) - \cos(2x) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

گام ۴ حالا سراغ محاسبه m می‌رویم: $\frac{3 \sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sqrt{3}} + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ از $\sqrt{3}$ فاکتور می‌گیریم. باز می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + m(\sin(2x) \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos(2x) \cdot \sin \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + m\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x)\right) = 1$$

از (I) و (III) کمک می‌گیریم:

$$\left(\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(m \times \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 + \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} = -1 \Rightarrow m = -2$$

۵ برای به دست آوردن دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

یک تناوب کامل	نصف تناوب	یک چهارم تناوب

۶ در توابع مثلثاتی به شکل $y = a + b \sin(cx)$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \\ a = \frac{\max + \min}{2} \end{cases} \quad \text{ب) } T = \frac{2\pi}{|c|} \end{aligned}$$

پ) اگر نمودار تابع در محل برخورد با محور y صعودی باشد، $bc > 0$ و اگر نزولی باشد، $bc < 0$.

گام ۱ ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس نامه، عبارت مخرج کسر را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} = b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

گام ۲ در ادامه از فرمول‌های نسبت‌های دوالفایی (مورد (۲) درس نامه)، کمک می‌گیریم

تا توان ۲ کسینوس را از بین ببریم:

$$\alpha = cx - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

گام ۳ با توجه به مورد (۳) درس نامه، می‌توانیم به $\frac{3\pi}{4}$ ، 2α ، $2cx$ را اضافه کنیم:

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cos\left(2cx - \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cos\left(2cx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{مورد (۴) درس نامه} \quad \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \sin(2cx)$$

گام ۴ حالا در ضابطه تابع f ، به جای $\frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{b}{2} - \frac{b}{2} \sin(2cx)$$

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \sin(2cx)$$

گام ۵ با توجه به نمودار تابع، از $x = 0$ تا $x = 9\pi$ یک تناوب کامل داریم، پس $T = 9\pi$ است.

حالا با استفاده از مورد (۶-ب) درس نامه داریم:

$$\frac{9\pi}{|c|} = 9\pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

گام ۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \sin(2cx)$ در محل برخورد با محور

y صعودی است، پس طبق مورد (۶-پ) درس نامه، $\frac{b}{2} \times 2c > 0$ ، یعنی $bc > 0$ می‌شود.

می‌توانیم برای راحتی کار فرض کنیم b و c هر دو مثبت‌اند، پس $c = +1$ است.



۱۴- گزینه ۱

۲ هم‌ارزی پرتوان: برای محاسبه حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$)

کافی است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیه جملات را حذف کنید. برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-2}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

گام ۱ تابعی هموگرافیک است. فرض کنید ضابطه f به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد

که در این صورت، ضابطه f^{-1} به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ می‌شود.

گام ۲ حاصل حدهای داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{-dx+b}{cx-a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ax+b)(cx-a)}{(cx+d)(-dx+b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{acx^2 + \dots}{-cdx^2 + \dots} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{acx^2}{-cdx^2} = \frac{ac}{-cd} = -\frac{a}{d}$$

سراغ حد دیگر می‌رویم. واضح است که حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ معکوس حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$

است، (چون $\frac{f}{f^{-1}}$ معکوس $\frac{f^{-1}}{f}$ است.) پس $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = -\frac{d}{a}$ می‌شود.

گام ۳ حالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ a = -d \end{cases}$$

گام ۴ طبق مورد (۱-پ) درس‌نامه، محل تقاطع مجانب‌های تابع هموگرافیکی

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است. حالا دو حالت داریم:

حالت اول: اگر $a = d$ باشد، محل تقاطع مجانب‌ها به صورت $(-\frac{a}{c}, \frac{a}{c})$ می‌شود؛ یعنی جمع طول و عرض نقطه تقاطع باید صفر باشد که این‌گونه است، پس می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های f باشد.

حالت دوم: اگر $a = -d$ باشد، محل تقاطع مجانب‌ها به صورت $(\frac{a}{c}, \frac{a}{c})$ می‌شود؛ یعنی طول و عرض نقطه تقاطع با هم برابرند که هیچ‌کدام از گزینه‌ها به این صورت نیست.

۱۶- گزینه ۴

استراتژی باید پیوستگی f را به ازای $n=1$ و $n=2$ بررسی کنید.

گام ۱ ابتدا فرض کنید $n=1$ است، پس f باید در $x=1$ و $x=-1$ پیوسته باشد. پیوستگی f در $x=1$ را بررسی می‌کنیم: حد راست f در $x=1$ برابر است با:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \underbrace{[x]=1}_{\text{فرد}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |[-x]-x|$$

مقدار $[-x]$ در $x \rightarrow 1^+$ (مثلاً $x=1/1$) برابر -2 است $([-1/1]=-2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |[-x]-x| = \lim_{x \rightarrow 1^+} |-2-x| = |-2-1| = 3$$

مقدار f در $x=1$ برابر است با:

$$x=1 \Rightarrow \underbrace{[x]=1}_{\text{فرد}} \Rightarrow f(x) = |[-x]-x| \Rightarrow f(1) = |[-1]-1| = |-1-1| = 2$$

حد راست و مقدار f در $x=1$ برابر نیستند، پس f در $x=1$ پیوسته نیست، در نتیجه f در n های فرد ناپیوسته می‌شود.

گام ۲ حالا فرض کنید $n=2$ است؛ پس f باید در $x=2$ و $x=-2$ پیوسته باشد.

پیوستگی f در $x=2$ را بررسی می‌کنیم. برای به دست آوردن حد راست f در $x=2$ داریم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \underbrace{[x]=2}_{\text{زوج}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} k-x+\underbrace{[x]}_2 = k-2+2 = k$$

حد چپ f در $x=2$ برابر است با:

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow \underbrace{[x]=1}_{\text{فرد}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |[-x]-x|$$

۱۵- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در مورد تابع هموگرافیکی موارد زیر را بلد باشید:

(الف) ضابطه این تابع به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ است (به شرطی که $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$ باشند).

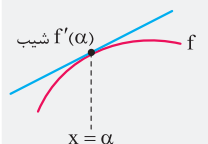
(ب) ضابطه وارون یک تابع هموگرافیکی به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

(پ) محل تقاطع مجانب‌های تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است. (در اصل، مجانب قائم تابع هموگرافیکی، ریشه مخرج آن، یعنی ریشه $cx+d=0$ یا همان $-\frac{d}{c}$ است و مجانب افقی آن، همان حاصل حد در بی‌نهایت f است که برابر $\frac{a}{c}$ می‌شود.)



۱۸- گزینه ۱

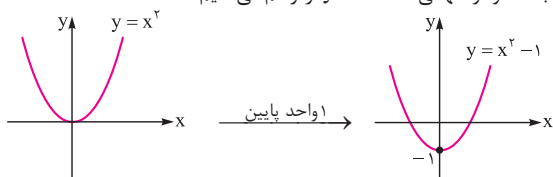
درسنامه ۱ اگر $k > 0$ باشد، برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به پایین ببریم.



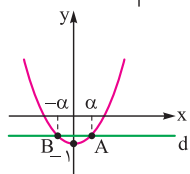
۲ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن برابر $f'(\alpha)$ است.

۳ اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌شود.

گام ۱ ابتدا نمودار سهمی $y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم:



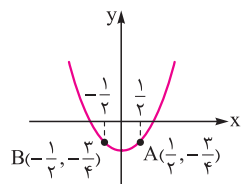
گام ۲ نمودار $y = x^2 - 1$ ، نسبت به محور y متقارن است، پس می‌توانیم فرض کنیم خط d ، این منحنی را در دو نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند. ($\alpha > 0$)



گام ۳ مشتق تابع $y = x^2 - 1$ ، به صورت $y' = 2x$ است، پس شیب خط مماس بر y در نقطه‌ای به طول α برابر 2α و شیب خط مماس بر y در نقطه‌ای به طول $-\alpha$ برابر -2α است.

گام ۴ این دو خط بر هم عمودند، پس حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 است:

$$\Rightarrow (2\alpha) \times (-2\alpha) = -1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{1}{2}$$



گام ۵ با جای‌گذاری $x = \pm \frac{1}{2}$ در ضابطه $y = x^2 - 1$ ،

$$y = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

عرض دو نقطه تماس $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ و $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ می‌شود که مجموع عرض دو نقطه $-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$ است.

۱۹- گزینه ۳

درسنامه طول نقطه عطف توابع درجه‌سوم به شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر $x = -\frac{b}{3a}$ است.

گام ۱ طول نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{3}x^3 - (k+2)x^2$ ، طبق درس‌نامه برابر

$$-\frac{-(k+2)}{\frac{3k}{3}} = \frac{2(k+2)}{3k}$$

منفی شود: $\frac{2(k+2)}{3k} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 2(k+2) = 0 \Rightarrow k = -2 \text{ (ریشه فرد)} \\ 3k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ (ریشه فرد)} \end{cases}$ ریشه‌ها



به دنبال قسمت‌های منفی هستیم، پس: $k \in (-2, 0)$ (I)

گام ۲ حالا با جای‌گذاری $x = \frac{2(k+2)}{3k}$ در منحنی، عرض نقطه عطف را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{k}{3}x^3 - (k+2)x^2 \xrightarrow{x = \frac{2(k+2)}{3k}} y = \frac{k}{3} \left(\frac{2(k+2)}{3k}\right)^3 - (k+2) \left(\frac{2(k+2)}{3k}\right)^2$$

$$= \frac{k}{3} \times \frac{8(k+2)^3}{27k^3} - (k+2) \times \frac{4(k+2)^2}{9k^2}$$

$$= \frac{8(k+2)^3}{27k^2} - \frac{4(k+2)^3}{9k^2} = \frac{8(k+2)^3 - 12(k+2)^3}{27k^2} = -\frac{4(k+2)^3}{27k^2}$$

مقدار $[-x]$ در $x \rightarrow 2^-$ (مثلاً $x = 1/9$) برابر -2 است $[-1/9] = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |[-x] - x| = \lim_{x \rightarrow 2^-} |-2 - x| = |-2 - 2| = 4$$

مقدار f در $x = 2$ نیز برابر است با:

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = k - x + [x] \Rightarrow f(2) = k - 2 + [2] = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = 2$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow k = 4$$

گام ۳ پیوستگی f در $x = -2$ را بررسی می‌کنیم. برای به دست آوردن حد راست f در $x \rightarrow (-2)^+$ $\Rightarrow [x] = -2$ (مثلاً $x = -1/9$)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} k - x + [x] = k - (-2) - 2 = k + 2 - 2 = k$$

حد چپ f در $x = -2$ برابر است با:

$$x \rightarrow (-2)^- \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} |[-x] - x|$$

مقدار $[-x]$ در $x \rightarrow (-2)^-$ (مثلاً $x = -2/1$) برابر 2 است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} |[-x] - x| = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} |2 - x| = |2 - (-2)| = 4$$

مقدار f در $x = -2$ نیز برابر است با: $x = -2 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = k - x + [x]$

$$\Rightarrow f(-2) = k - (-2) - 2 = k + 2 - 2 = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = -2$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \Rightarrow k = 4$$

بنابراین به ازای مقدار مشخص k ، f در n زوج پیوسته می‌شود؛ پس f در n های زوج پیوسته است.

۱۷- گزینه ۲

استراتژی اول ضابطه g را به دست آورید؛ بعد از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنید.

درسنامه وقتی $x \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی‌های مثلثاتی زیر را داریم:

$$\sin(u) \approx u, \cos(u) \approx 1 - \frac{u^2}{2}$$

گام ۱ ابتدا ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = xg(x) - 2x + 5 \Rightarrow xg(x) = f(x) + 2x - 5$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{f(x) + 2x - 5}{x} = \frac{f(x) - 5}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{f(x) - 5}{x} + 2$$

به جای f ، ضابطه آن را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} - 5}{x} + 2 = \frac{\Delta \cos x - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\Delta \cos x - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2$$

گام ۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را می‌خواهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos x - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2$$

چون $x \rightarrow 0$ ، پس طبق درس‌نامه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos x - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} - 5 + 5 \sin x}{x(1 - \sin x)} + 2 = 5 + 2 = 7$$



x در بازه $[-1, 0]$ است که در این بازه، $x + \sqrt{-x} - 1$ منفی است (برای این که بهتر متوجه بشید، کافیه به پای x قرار بدین $-\frac{1}{4}$)، حالا قدر مطلق را برمی داریم: $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - \sqrt{-x} + 1)$

گام ۳ از تابع $d(x)$ مشتق می گیریم:

$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - \frac{-1}{2\sqrt{-x}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \frac{1}{2\sqrt{-x}}) = 0$$

$$-1 + \frac{1}{2\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{-x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

بنابراین طول نقطه اکسترمم این تابع، $x = -\frac{1}{4}$ است. با جای گذاری $x = -\frac{1}{4}$ در تابع $d(x)$ ، جواب حاصل می شود:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - \sqrt{-x} + 1) \Rightarrow d(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(-\frac{1}{4}) - \sqrt{-(-\frac{1}{4})} + 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

۲۱- گزینه ۲

گام ۱ می خواهیم ۷ تا کتاب را طوری بچینیم که وقتی یکی یکی برشان می داریم تا در گوشه دیگر اتاق بچینیم؛ ترتیب عنوان ها به هم نخورد. این اتفاق زمانی می افتد که مطابق شکل مقابل کتاب های اول و هفتم، هم عنوان، کتاب های دوم و ششم، هم عنوان و همین طور کتاب های سوم و پنجم هم عنوان باشند.

اگر کتاب های فیزیک را با F و کتاب های ریاضی را با R نشان بدهیم؛ چنین آرایشی در سه حالت اتفاق می افتد:

R	R	F
F	R	R
R	F	R
F	F	F
R	F	R
F	R	R
R	R	F

(حالت ۱) (حالت ۲) (حالت ۳)

گام ۲ در هر کدام از حالت های بالا کتاب های فیزیک ۳! و کتاب های ریاضی ۴! جایگشت دارند چون کتاب ها متمایزند، پس جواب مسئله می شود:

$$(4! \times 3!) + (4! \times 3!) + (4! \times 3!) = 3 \times (4! \times 3!) = 3 \times 24 \times 6 = 432$$

۲۲- گزینه ۱

استراتژی اول نمودار ون را برای دو پیشامد A و B می کشیم، بعد مقدار $P(A - B)$ و $P(B - A)$ را در ناحیه مناسب می نویسیم. در ادامه مقدار $P(A \cap B)$ را x در نظر می گیریم تا بتوانیم $\frac{P(A)}{P(B)}$ را برحسب x بنویسیم. در آخر مقدار x را طوری تنظیم می کنیم که $\frac{P(A)}{P(B)}$ کمترین شود.

گام ۱ با دو پیشامد A و B طرفیم، پس نمودار ون را به صورت زیر می کشیم.

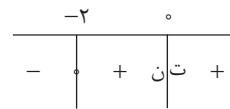
حالا باید احتمال رخ دادن پیشامدهای $A - B$ و $B - A$ را در ناحیه مناسب بنویسیم. به گفته سؤال $P(A - B) = \frac{3}{5}$ است؛ پس در ناحیه قرمز رنگ مقابل می نویسیم $\frac{3}{5}$. از طرفی $P(B - A) = \frac{1}{5}$ است؛ بنابراین $P(S) = 1$

در ناحیه آبی رنگ بالا هم باید بنویسیم $\frac{1}{5}$.

گام ۳ برای این که نقطه عطف در ربع سوم باشد، باید عرض آن هم منفی شود:

$$\Rightarrow -\frac{\lambda(k+2)^3}{2\sqrt{k}} < 0 \Rightarrow \frac{\lambda(k+2)^3}{2\sqrt{k}} > 0$$

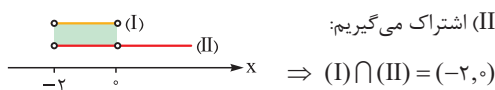
$$\xrightarrow{\text{ریشه ها}} \begin{cases} \lambda(k+2)^3 = 0 \Rightarrow k = -2 \text{ (ریشه فرد)} \\ 2\sqrt{k} = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ (ریشه زوج)} \end{cases}$$



جدول تعیین علامت رسم می کنیم:

$$k \in (-2, 0) \cup (0, +\infty) \quad (II)$$

این جا به دنبال قسمت های مثبت هستیم، پس:



که این بازه فقط شامل یک عدد صحیح (فقط -۱) است.

۲۰- گزینه ۴

درس نامه ۱ هر وقت در سؤالی به ما گفته شود که نقطه A روی منحنی $y = f(x)$ قرار دارد (یا گفته باشد بیشترین یا کمترین فاصله نقاط منحنی $y = f(x)$ را از فلان چیز می خواهیم)، مختصات نقاط روی منحنی را به صورت $(x, f(x))$ در نظر می گیریم. برای مثال نقاط روی منحنی $y = \sqrt{x-1}$ را به صورت $(x, \sqrt{x-1})$ فرض می کنیم.

۲ در مسائل بهینه سازی، برای پیدا کردن طول نقاط اکسترمم یک تابع، کافی است ریشه های صورت و مخرج مشتق آن را محاسبه کنیم.

۳ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام ۱ ابتدا دقت کنید برای این که زیر رادیکال منفی نشود، باید $-x - [x^2] \geq 0$ ، یعنی $-x \geq [x^2]$ باشد. x^2 نامنفی است، پس $[x^2]$ هم نامنفی می شود؛ یعنی $-x$ هم باید نامنفی باشد، پس $x \leq 0$ است.

حالا با بازه بندی داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -1 < x \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{-x - [x^2]} = -\sqrt{-x} \\ -\sqrt{2} < x \leq -1 \Rightarrow -\sqrt{-x - [x^2]} = -\sqrt{-x-1} \\ -\sqrt{3} < x \leq -\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{-x - [x^2]} = -\sqrt{-x-2} \\ \vdots \end{cases}$$

غ ق ق، چون زیر رادیکال منفی می شود.

بقیه مقادیر نیز غیر قابل قبول اند، چون زیر رادیکال منفی می شود.

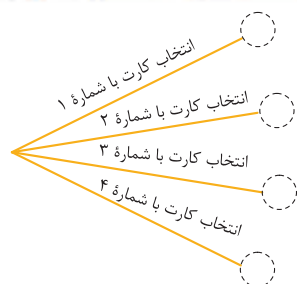
بنابراین ضابطه f به شکل مقابل می شود:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & -1 < x \leq 0 \\ -\sqrt{-x-1} & -\sqrt{2} < x \leq -1 \end{cases}$$

گام ۲ نمودار تابع f و خط $x - y - 1 = 0$ را رسم می کنیم؛ با توجه به نمودار رسم شده، واضح است نقاطی از منحنی f که کمترین فاصله را تا خط دارند، روی $-\sqrt{-x}$ قرار دارند.

گام ۳ نقاط روی $f(x) = -\sqrt{-x}$ را به صورت $A(x, -\sqrt{-x})$ نمایش می دهیم. فاصله این نقاط از خط $x - y - 1 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{\substack{1x - 1y - 1 = 0 \\ (x, -\sqrt{-x})}} d(x) = \frac{|x + \sqrt{-x} - 1|}{\sqrt{1+1}}$$



گام ۳ طبق شفاف‌سازی، باید
(یک بار «رو» | انتخاب کارت با شماره «۱»)
را حساب کنیم؛ بنابراین با فرم شرطی احتمال
کل طرف هستیم. اول «یک بار «رو»» را به
دست می‌آوریم. شروع نمودار درختی به این
صورت است:

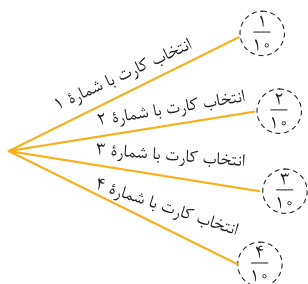
گام ۴ در دایره‌های توخالی بالا باید از بالا به پایین به ترتیب $P(۳), P(۲), P(۱)$ و $P(۴)$ را بنویسیم. به گفته سؤال چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ داریم که احتمال انتخاب شدن هر کدامشان متناسب با عدد نوشته شده روی آن‌ها است، پس می‌توانیم بگوییم:
 $P(۱) = ۱x, P(۲) = ۲x, P(۳) = ۳x, P(۴) = ۴x$
حالا جمع احتمال‌های بالا را مساوی ۱ می‌گذاریم (طبق مورد (۲) درس‌نامه):

$$x + 2x + 3x + 4x = 1 \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

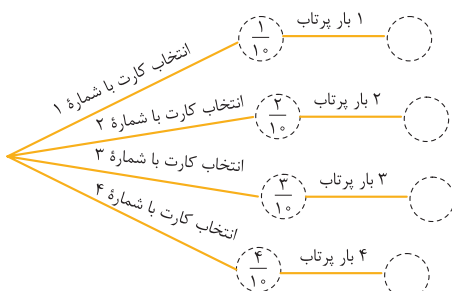
بنابراین احتمال انتخاب هر کدام از کارت‌ها می‌شود:

$$P(۱) = \frac{1}{10}, P(۲) = \frac{2}{10}, P(۳) = \frac{3}{10}, P(۴) = \frac{4}{10}$$

پس تا این‌جا نمودار درختی به این صورت شد:



گام ۵ حالا شاخه‌های نمودار درختی را ادامه می‌دهیم:



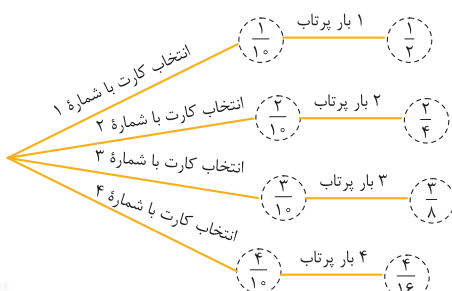
همان‌طور که می‌بینید در شاخه اول، ۱ بار سکه پرتاب می‌کنیم و ۱ «رو» می‌خواهیم که طبق

مورد (۳) درس‌نامه احتمالش برابر $\frac{1}{2}$ است. در شاخه دوم، ۲ بار سکه پرتاب می‌کنیم

و باز هم ۱ «رو» می‌خواهیم که احتمالش $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ است. به همین ترتیب در شاخه‌های

سوم و چهارم هم به ترتیب اعداد $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$ و $\frac{4}{16} = \frac{4}{2^4}$ را می‌نویسیم تا نمودار درختی

به صورت زیر تکمیل بشود:



گام ۵ بیا فرض کنیم $P(A \cap B) = x$ باشد، در این صورت، طبق نمودار ون،
 $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3x+3}{4}}{\frac{4x+1}{4}} = \frac{3x+3}{4x+1}$ برابر می‌شود با:

نکته هر تابع هموگرافیک مثل $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، دو شاخه دارد. در صورتی که $ad - bc > 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً صعودی و در صورتی که $ad - bc < 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً نزولی هستند.

طبق نکته بالا، $y = \frac{3x+3}{4x+1}$ یک تابع هموگرافیک با شاخه‌های نزولی است، چون $ad - bc = 3 - 4 = -1 < 0$ است؛ بنابراین اگر حداقلش را می‌خواهیم باید حداکثر x را حساب کنیم.

گام ۶ همان‌طور که در نمودار ون گام (۱) می‌بینید؛ از کل احتمال، $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ در قسمت‌های رنگی هستند. x زمانی حداکثر می‌شود که همه $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ باقی‌مانده را به $P(A \cap B)$ اختصاص بدهیم؛ یعنی $x_{\max} = \frac{3}{4}$ است. بنابراین کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3x+3}{4x+1} \xrightarrow{x_{\max} = \frac{3}{4}} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3+3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

البته می‌توانستیم پای تابع هموگرافیک را وسط نکشیم. را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3x+3}{4x+1} = \frac{(4x+1)+2}{(4x+1)} = \frac{4x+1}{4x+1} + \frac{2}{4x+1} = 1 + \frac{2}{4x+1}$$

از تساوی بالا هم می‌توانیم بفهمیم که هر چه مخرج کسر $\frac{2}{4x+1}$ بزرگ‌تر شود، خودش کوچک‌تر و در نتیجه کل $\frac{P(A)}{P(B)}$ کوچک‌تر خواهد شد؛ بنابراین x باید حداکثر شود و ...

۲۳- گزینه ۳

گام ۱ به گفته سؤال اعداد دسته اول به صورت زیر هستند:
دسته اول: ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹۷, ۹۸, ۹۹, ۱۰۰

می‌خواهیم در هر مرحله ۲ تا عدد حذف کنیم و اختلافشان را در دسته جدید بنویسیم؛ تا جایی که همه اعداد دسته اول حذف بشوند و همه اعداد دسته دوم، فرد و غیرتکراری باشند. اگر به جای ۱ و ۱۰۰ عدد ۹۹، به جای ۲ و ۹۹ عدد ۹۷، ... و به جای ۴۹ و ۵۰ عدد ۱ را قرار دهیم، اعداد دسته دوم می‌شوند:
دسته دوم: ۱, ۳, ۵, ۷, ..., ۹۹
که ویژگی‌های مسئله را دارند.

گام ۲ **نکته** اگر تعدادی داده، یک دنباله حسابی بسازند، میانگینشان برابر می‌شود با میانگین اعداد اول و آخر.

سؤال میانگین اعداد ۱, ۳, ۵, ..., ۹۹ را می‌خواهد که یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌سازند، پس طبق نکته بالا میانگینشان برابر می‌شود با:

$$\bar{x} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2} = \frac{1 + 99}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

۲۴- گزینه ۴

شفاف‌سازی «اگر سکه یک بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً یک بار پرتاب شده است؟» یعنی اگر سکه یک بار «رو» آمده باشد، چه‌قدر احتمال دارد که کارت با شماره «۱» انتخاب شود. این یعنی باید (یک بار «رو» | انتخاب کارت با شماره «۱») را حساب کنیم.

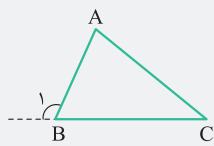
درس‌نامه ۱ قانون بیز: در «فرم شرطی احتمال کل» اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

۲ در فضای نمونه‌ای $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، جمع احتمال همه برآمدها برابر ۱ است؛ یعنی:

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

۳ در n بار پرتاب یک سکه، احتمال این که m بار «رو» بیاید، برابر است با:

$$P = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$



درس نامه ۱ در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. مثلاً در مثلث مقابل، زاویه خارجی B_1 می‌شود:

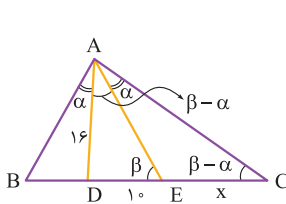
$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}$$

اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد، آن دو مثلث متشابه می‌شوند. مثلاً مثلث‌های زیر با دو زاویه برابر α و β متشابه هستند. فقط حواستان باشد وقتی دو زاویه از دو مثلث برابر شدند، سومین زاویه‌شان هم خودبه‌خود برابر می‌شود. (این‌جا ما سومین زاویه برابر را با θ نشان دادیم.)

برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم؛ به طوری که طول ضلع‌های یک مثلث همگی در صورت کسرها و مثلث دیگر در مخرج کسرها باشند. مثلاً نسبت تشابه دو مثلث بالا به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

رو به θ رو به β رو به α



گام ۱ (پیدا کردن مثلث‌های متشابه در شکل)

طبق فرض سؤال $\hat{B}AD = \hat{E}AC$ است؛ ما این دو زاویه را برابر با α در نظر گرفته‌ایم، از طرفی سؤال گفته $BA = BE$ ، این یعنی مثلث BAE متساوی‌الساقین است و می‌توانیم فرض کنیم $\hat{B}AE = \hat{A}EB = \beta$ باشد؛ در این صورت $\hat{D}AE = \hat{B}AE - \alpha = \beta - \alpha$ می‌شود.

حالا خوب به $\hat{A}EB$ در شکل نگاه کنید. این زاویه برای مثلث ACE یک زاویه خارجی است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه برابر می‌شود با:

$$\hat{A}EB = \hat{C}AE + \hat{C} \Rightarrow \beta = \alpha + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \beta - \alpha$$

حالا می‌توانیم بگوییم دو زاویه از مثلث ADC با دو زاویه از مثلث EDA برابر است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه این دو مثلث متشابه‌اند:

$$\begin{cases} \hat{D}AC = \hat{A}ED = \beta \\ \hat{C} = \hat{D}AE = \beta - \alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ADE$$

گام ۲ (یافتن خواسته سؤال)

حالا نسبت تشابه دو مثلث ADC و ADE را به کمک مورد (۳) درس‌نامه می‌نویسیم:

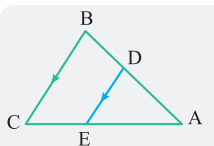
$$\frac{AD}{DE} = \frac{DC}{AD} \Rightarrow \frac{16}{x+10} = \frac{x+10}{16} \Rightarrow x+10 = \frac{16 \times 16}{10}$$

رو به β رو به $\beta - \alpha$

$$\Rightarrow x+10 = \frac{256}{10} \Rightarrow x+10 = 25.6 \Rightarrow x = 15.6$$

مشاوره سؤالی از تشابه که ایده آن را به احتمال بسیار زیاد تا به حال ندیده بودید، اما دقت کنید که معمولاً اگر در سؤالی صحبت از زاویه‌های برابر بود و خواسته سؤال طول یک پاره‌خط، احتمال این که کلید حل سؤال، استفاده از تشابه مثلث‌ها باشد، بسیار زیاد است.

۲۷ - گزینه ۲

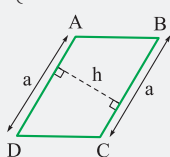


درس نامه ۱ اگر در شکل مقابل، DE با BC موازی باشد، طبق تعمیم قضیه تالس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases}$$

۲ از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:



۳ مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول ارتفاع در قاعده‌اش. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$S_{ABCD} = h.a$$

گام ۱ حالا شاخه‌ها را در هم ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم تا (یک بار «رو») پیدا شود:

$$P(\text{رو}) = \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{10} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{10} + \frac{9}{40} + \frac{1}{10} = \frac{4+8+9+4}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

گام ۲ در آخر طبق قانون بیز برای محاسبه (یک بار «رو» | انتخاب کارت با شماره «۱») باید شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنیم. شاخه مطلوب شاخه‌ای است که کارت با شماره «۱» رو شده (شاخه اول) و احتمال کل هم که شد $\frac{5}{8}$ ، پس:

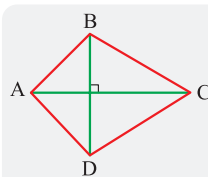
$$P(\text{«۱» رو شده} | \text{انتخاب کارت با شماره «۱»}) = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{5}{40}} = \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

۲۵ - گزینه ۱

شفاف‌سازی «هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است»؛ یعنی:

ضرب قطره‌های لوزی = $(\text{طول ضلع لوزی})^2$

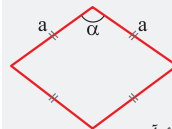
استراتژی مساحت لوزی را یک بار برحسب قطرهای آن و یک بار هم برحسب زاویه داخلی‌اش می‌نویسیم و مساوی هم می‌گذاریم تا زاویه‌های داخلی لوزی پیدا شود.



درس نامه ۱ مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن. مثلاً برای مساحت چهارضلعی ABCD در شکل مقابل می‌توانیم رابطه مقابل را بنویسیم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

چون قطرهای لوزی بر هم عموداند، از این فرمول برای محاسبه مساحت لوزی هم می‌توانیم استفاده کنیم.



۲ اگر لوزی به طول ضلع a ، زاویه‌ای برابر با α داشته باشد (مثل شکل مقابل)، مساحت آن برابر است با:

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha$$

در این فرمول فرقی نمی‌کند α زاویه حاده لوزی باشد یا زاویه منفرجه آن.

گام ۲ (نوشتن مساحت لوزی برحسب زاویه داخلی‌اش)

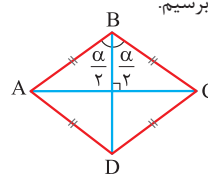
مطابق شکل، زاویه منفرجه این لوزی را α و طول ضلعش را a در نظر می‌گیریم. با توجه به قسمت (۲) درس‌نامه، می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha \quad (۱)$$

گام ۳ (نوشتن مساحت لوزی برحسب قطرهایش)

حالا قطرهای لوزی را به شکل بالا اضافه می‌کنیم تا به شکل زیر برسیم. همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم برای مساحت این لوزی می‌توانیم رابطه زیر را هم بنویسیم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \quad (۲)$$



گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال)

طبق شفاف‌سازی داریم: $a^2 = AC \times BD \Rightarrow (\text{طول ضلع لوزی})^2 = AC \times BD$ حالا سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) را مساوی هم می‌گذاریم و به جای $AC \times BD$ می‌نویسیم a^2 :

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = a^2 \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} a^2 = a^2 \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin \alpha$$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \alpha = 150^\circ$$

پس زاویه بزرگ‌تر لوزی 150° است

۲۶ - گزینه ۴

استراتژی اول نشان می‌دهیم دو مثلث ADC و ADE متشابه‌اند؛ بعد با نوشتن نسبت تشابه‌شان، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.



گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)

طبق مورد (۲) درس نامه، مساحت مثلث GBC ، $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است، پس:

$$S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle GBC} = 3 \times 24 = 72$$

مشاوره خاصیت نقطه همرسی میانه‌های مثلث، یکی از مهم‌ترین مطالب هندسه پایه است؛ به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم، حتماً درس‌نامه این سؤال را بخوانید.

گزینه ۳ - ۲۹

درس‌نامه اندازه هر زاویه ظلی، نصف اندازه کمان مقابلش است.
مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{1}{2} \widehat{MCA} \\ \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \widehat{MBA} \end{cases}$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال)
در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ را محاط در دایره و از هر رأس آن مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. همان‌طور که می‌بینید، هر رأس این چهارضلعی، رأس دو زاویه ظلی است (مثلاً A ، رأس دو زاویه ظلی A_1 و A_2 است).

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)
سؤال به دنبال مجموع همه زاویه‌های ظلی قرمز رنگ در شکل بالا است که برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 \\ = \frac{1}{2} \widehat{AD} + \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \widehat{BC} + \frac{1}{2} \widehat{BC} + \frac{1}{2} \widehat{CD} + \frac{1}{2} \widehat{CD} + \frac{1}{2} \widehat{AD} \\ = \widehat{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ \end{aligned}$$

کل دایره

تله اگر به اشتباه، هر رأس را متناظر به یک زاویه ظلی در نظر می‌گرفتیم؛ خواسته سؤال رابطه صورت $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = ?$ می‌دیدیم که می‌شود 180° . این جوری در تله ۱ می‌افتادیم!

گزینه ۲ - ۳۰

استراتژی دایره رسم شده، یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث MNP است که فرمول محاسبه شعاع آن را می‌دانیم. برای استفاده از فرمول، نیاز به مساحت مثلث داریم. برای محاسبه مساحت مثلث، اول به کمک داده‌های سؤال طول ضلع‌های مثلث را به دست می‌آوریم؛ بعد از رابطه هرون استفاده می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ اگر p نصف محیط مثلثی با اضلاع a ، b و c باشد، در این صورت مساحت مثلث برابر می‌شود با: (رابطه هرون)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۲ هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد که هر کدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس‌اند. در شکل زیر یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را کشیده‌ایم. شعاع این دایره را می‌توانیم به کمک رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$r_c = \frac{S_{\triangle ABC}}{p - AB}$$

نصف محیط مثلث ABC

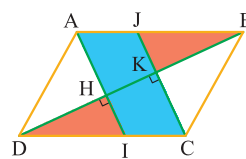
۳ نکته جالبی که در شکل بالا وجود دارد، این است که طول پاره‌خط‌های TC و $T'C$ هر دو مساوی نصف محیط مثلث ABC هستند، یعنی:

$$CT = CT' = p$$

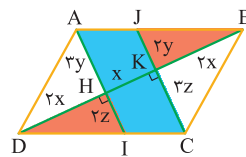
گام ۱ (محاسبه طول NP)
دایره سبز رنگ در شکل مقابل، همان دایره محاطی خارجی مثلث MNP است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$MT = MNP \text{ نصف محیط مثلث } \Rightarrow 18 = \frac{NP + 15 + 12}{2} \Rightarrow 36 = NP + 27 \Rightarrow NP = 9$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل آن)



همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ AC قطر کوچک متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. طبق خواسته سؤال، از دو سر این قطر، عمودهای AH و CK را بر قطر بزرگ (BD) رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های CD و AB را در I و J قطع کنند. الان می‌توانیم بگوییم مثلث BJK (یا DHI) کوچک‌ترین مثلث ساخته شده در شکل و چهارضلعی $AICK$ همان متوازی‌الاضلاع کوچکی است که سؤال از آن حرف می‌زند.

گام ۲ (پیدا کردن رابطه بین AH و JK)

به گفته سؤال طول دو پاره‌خط BK و DH ، دو برابر طول HK است که این فرض را در شکل نشان داده‌ایم.

از طرفی AH و JK هر دو بر BD عمودند، پس با هم موازی‌اند و در نتیجه طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABH داریم:

$$\frac{JK}{AH} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow \frac{JK}{AH} = \frac{2x}{2x} \Rightarrow \frac{JK}{AH} = \frac{2}{3} \quad (*)$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه از تساوی $(*)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} JK = 2y \\ AH = 3y \end{cases}$$

اگر همین تالس را در مثلث DKC هم بنویسیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $HI = 2z$ و $KC = 3z$.

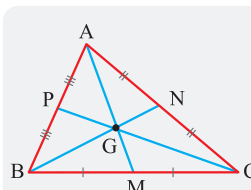
گام ۳ (پیدا کردن رابطه بین y و z) در متوازی‌الاضلاع $AICK$ ، ضلع‌های مقابل به هم $AI = CK$ و $CJ = AK$ برابرند، پس می‌توانیم بنویسیم: $3y + 2z = 2y + 3z \Rightarrow y = z$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال)
حالا می‌توانیم خواسته سؤال را به دست آوریم:

$$\frac{S(AICK)}{S(BJK)} = \frac{HK \times JC}{\frac{1}{2} BK \times JK} = \frac{(x)(2y + 3z)}{\frac{1}{2} (2x)(2y)} = \frac{2xy}{xy} = \frac{2}{1} = 2$$

گزینه ۴ - ۲۸

استراتژی اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم، بعد از خاصیت نقطه همرسی میانه‌ها کمک می‌گیریم.



درس‌نامه ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای به اسم مرکز ثقل (G) هم‌رس‌اند. این نقطه، هر میانه را به نسبت 2 به 1 تقسیم می‌کند؛ یعنی:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

۲ هر وقت از مرکز ثقل مثلث به رأس‌های وصل کنیم؛ سه مثلث هم‌مساحت درست می‌شود؛ این یعنی در شکل مقابل داریم:

$$S = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$
گام ۱ (محاسبه مساحت مثلث GBC)

شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانه‌های $BN = 12$ و $CP = 9$ همدیگر را به نسبت 2 به 1 قطع می‌کنند که این موضوع را به کمک پارامترهای x و y در شکل نشان داده‌ایم. حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} BN = 12 &\Rightarrow x + 2x = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow GB = 2x = 8 \\ CP = 9 &\Rightarrow y + 2y = 9 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow GC = 2y = 6 \end{aligned}$$

حالا می‌توانیم مساحت مثلث قائم‌الزاویه GBC را حساب کنیم:

$$S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2} GB \cdot GC \Rightarrow S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$



گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال)

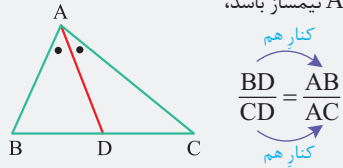
حالا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B$ ، $A'BH$ را به دست می آوریم:

$$A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{3^2(1+2^2)} = 3\sqrt{5}$$

۳۲ - گزینه ۲

استراتژی اگر در مثلث ABC ، نیمساز زاویه BAC را رسم کنید، دو مثلث در شکل خواهید داشت که نیمساز یکی از زاویه های هر کدام رسم شده اند و می توانید از روابط نیمساز در آن ها استفاده کنید.

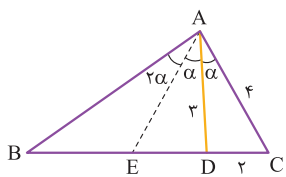
درس نامه ۱ نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناری اش تقسیم می کند، این یعنی اگر در شکل مقابل AD نیمساز باشد، می توانیم بنویسیم:



برای محاسبه طول نیمساز AD هم می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:
 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

۲ از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ، می توانیم نتیجه بگیریم که $a = mk$ و $b = nk$.

گام ۴ (افزودن پاره خط مناسب به شکل)



سؤال گفته $\hat{B}AD = 2\hat{D}AC$ ، پس می توانیم فرض کنیم $\hat{D}AC = \alpha$ و $\hat{B}AD = 2\alpha$ باشد. حالا نیمساز زاویه BAC را رسم می کنیم تا BC را در E قطع کند که در این صورت داریم $\hat{D}AE = \alpha$ و $\hat{BAE} = \frac{1}{2}(\alpha + 2\alpha) = 2\alpha$.

گام ۵ (استفاده از روابط نیمساز در مثلث ACE)

در مثلث ACE ، AD نیمساز است، پس طبق مورد (۱) درس نامه داریم:

$$\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{2} = \frac{AE}{4} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = k, AE = 2k$$

حالا که طول قطعات AE و DE را بر حسب k داریم، از فرمول طول نیمساز استفاده می کنیم تا k به دست آید:

$$\Rightarrow 9 = 6k \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} DE = k = \frac{3}{2} \\ AE = 2k = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \end{cases}$$

گام ۶ (استفاده از روابط نیمساز در مثلث ABC و محاسبه خواسته سؤال) چیزهایی را که تا

این جا به دست آوردیم روی شکل مقابل می نویسیم. در مثلث ABC ، AE نیمساز است، پس:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{\frac{3}{2}} = \frac{AB}{4} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} BE = 3k' \\ AB = 8k' \end{cases}$$

این بار فرمول طول نیمساز را در مثلث ABC می نویسیم تا k' به دست بیاید:

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot CE \Rightarrow 3^2 = (8k') \cdot 4 - (3k') \cdot \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{15}{2}k' \Rightarrow k' = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} AB = 8 \times \frac{2}{5} = \frac{16}{5} \\ BE = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \end{cases} (*)$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر می شود با:

$$\Delta ABC \text{ محیط} = AB + BC + AC = \frac{16}{5} + \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) + 4 = \frac{25}{5}$$

گام ۳ (محاسبه مساحت مثلث MNP)

حالا می توانیم بگوییم MNP ، مثلی به طول اضلاع $NP = 9$ ، $MP = 12$ ، $MN = 15$ شد که نصف محیطش می شود $\frac{15+12+9}{2} = 18$. حالا با استفاده از رابطه هرون، مساحتش

$$S_{\Delta MNP} = \sqrt{(18)(18-9)(18-12)(18-9)} = \sqrt{3^6 \times 2^2} = 3^3 \times 2 = 54$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا که مساحت مثلث MNP را داریم می توانیم به کمک مورد (۲) درس نامه، شعاع دایره محاطی خارجی اش را به دست بیاوریم:

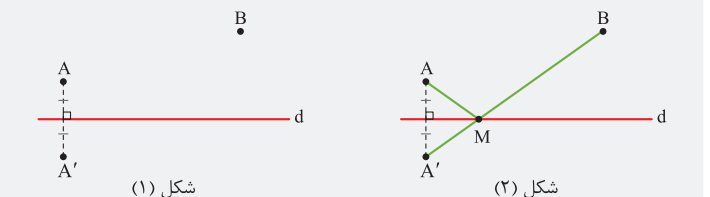
$$r = \frac{S_{\Delta MNP}}{p - NP} \Rightarrow r = \frac{54}{18 - 9} = \frac{54}{9} = 6$$

↓
نصف محیط مثلث MNP

۳۱ - گزینه ۳

درس نامه ۱ مسئله هرون: در این مسئله مطابق شکل مقابل دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می خواهیم نقطه ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم به طوری که مسیر AMB (همون $AM + MB$) کمترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیدا کردن نقطه M کارهای زیر را انجام می دهیم:

الف) نقطه A را نسبت به خط d بازتاب می دهیم تا به نقطه A' برسیم. (شکل ۱)
ب) A' را به B وصل می کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. M همان نقطه ای است که به دنبالش هستیم.



۲ در مسئله هرون (شکل مقابل) همیشه رابطه $AM + MB = A'B$ برقرار است؛ پس در این مسئله می توانیم به جای محاسبه $AM + MB$ ، « $A'B$ » را حساب کنیم.

گام ۳ (رسم شکل مناسب و پیدا کردن موقعیت نقطه C)

همان طور که در شکل زیر می بینید؛ A و B در یک طرف d قرار دارند و می خواهیم نقطه C روی خط d را طوری انتخاب کنیم که $AC + BC$ حداقل شود.

طبق مورد (۱) درس نامه، برای پیدا کردن این نقطه، اول A را نسبت به d بازتاب می دهیم تا A' برسیم، بعد A' را به B وصل می کنیم تا پاره خط $A'B$ ، d را در نقطه C قطع کند. C همان نقطه ای است که به دنبالش هستیم.

گام ۴ (تحلیل خواسته سؤال)

سؤال حداقل مقدار $AC + BC$ را می خواهد. طبق مورد (۲) درس نامه می توانیم به جای این مجموع، طول پاره خط $A'B$ را حساب کنیم. برای این کار اول باید طول $A'H$ را پیدا کنیم تا بتوانیم از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'BH$ استفاده کنیم. برای این منظور از A ، عمود AK را بر BH وارد می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABK ، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \xrightarrow{A'H=AK} A'H = 3$$

گام ۳۳ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا $|A| = \frac{75}{8}$ را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم تا خواسته سؤال به دست بیاید:

$$|\frac{1}{3}A| = \frac{1}{9}|A| = \frac{1}{9}(\frac{75}{8}) = \frac{25}{24}$$

مشاوره لگاریتم و دترمینان در کنکورهای قدیمی هم ترکیب شده بودند؛ باز هم ممکن است ترکیب شوند. پس لطفاً هیچ وقت قوانین لگاریتم ها، جزء مباحث حذفی تان نباشد.

گزینه ۳۴

شفاف سازی منظور از «وتری که از کانون بر محور سهمی عمود رسم می شود»، همان وتر کانونی است.

درس نامه ۱ همان طور که در شکل مقابل می بینید؛ فاصله رأس سهمی از کانون و خط هادی سهمی یکسان است. به این فاصله، **فاصله کانونی** می گوئیم و با $|a|$ نشانش می دهیم.

۲ اگر در سهمی، X^2 وجود داشته باشد، سهمی قائم و در نتیجه دهانه اش یا رو به سمت بالاست یا رو به پایین. در چنین سهمی هایی اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(h,k)$ و فاصله کانونی $|a|$ باشد؛ معادله سهمی مطابق جدول زیر نوشته می شود:

شکل	مشخصات
	رو به بالا
	رو به پایین
دهانه سهمی	
معادله سهمی	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ $(x-h)^2 = -4a(y-k)$

۳ مطابق شکل مقابل، اگر از کانون بر محور تقارن سهمی یک خط عمود بکشیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، وتری به طول $AB = 4|a|$ درست می شود که به آن **وتر کانونی** می گوئیم.

گام ۳۴ (تحلیل خواسته سؤال)

طبق شفاف سازی باید طول وتر کانونی، یعنی $4|a|$ را به دست بیاوریم؛ پس برای محاسبه خواسته سؤال، در ادامه فاصله کانونی $|a|$ را پیدا می کنیم.

گام ۳۵ (محاسبه فاصله کانونی سهمی و خواسته سؤال)

همان طور که در شکل مقابل می بینید، سهمی ای که رأسش $(2, -2)$ باشد و از نقطه $(-1, 1)$ بگذرد، هم می تواند افقی باشد و هم قائم.

این جا ما فرض می کنیم که سهمی قائم است، پس طبق مورد (۲) $(x-2)^2 = 4a(y+2)$ درس نامه می توانیم معادله اش را به این صورت بنویسیم: به گفته سؤال، سهمی از نقطه $(-1, 1)$ می گذرد، پس حق داریم مختصات این نقطه را در معادله سهمی جای گذاری کنیم: $(-1-2)^2 = 4a(1+2) \Rightarrow 9 = 12a \Rightarrow a = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ بنابراین خواسته سؤال برابر می شود با: $4|a| = 4(\frac{3}{4}) = 3$

گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ ، $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

مشاوره معمولاً سؤال هایی که حل آن ها نیاز به رسم خط اضافه دارد، سؤال های راحتی نیستند. اگر چنین سؤال هایی برایمان راحت باشد، معمولاً به دلیل این است که سؤال های مشابه آن را دیده ایم و خط اضافه مورد نیاز را سریع حدس می زنیم؛ اما این سؤال از آن ها نیست، پس اگر نتوانستید حلش کنید، نگران نباشید چون یکی از سخت ترین سؤال های هندسه تاریخ کنکور بود!

گزینه ۳۳

درس نامه ۱ دترمینان هر ماتریس 2×2 مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$|A| = ad - bc$$

ضرب درایه های قطر اصلی ضرب درایه های قطر فرعی

۲ در دنیای لگاریتم ها، ۴ قانون مهم زیر برقرار است:

- (الف)** قانون جمع لگاریتم ها: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$
- (ب)** قانون تفاضل لگاریتم ها: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
- (پ)** لگاریتم، توانی را که روی عدد جلوش نشسته باشد، به عنوان ضرب به پشت خودش منتقل می کند؛ یعنی: $\log_a b^m = m \log_a b$
- (ت)** در عبارت هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن ها عدد به توان لگاریتم می رسد، می توانیم جای a و c را عوض کنیم؛ یعنی: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
- ۳** دترمینان، عدد داخلش را اول به توان مرتبه ماتریس می رساند، بعد به عنوان ضرب به پشت خودش منتقل می کند؛ یعنی: $|k A_{n \times n}| = k^n |A|$

گام ۳۴ (تحلیل خواسته سؤال)

سؤال مقدار $|\frac{1}{3}A|$ را می خواهد. A یک ماتریس 2×2 است، پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم بگوئیم عدد $\frac{1}{3}$ داخل دترمینان به توان ۲ می رسد و به عنوان ضرب به پشت دترمینان می رود.

$$|\frac{1}{3}A_{2 \times 2}| = (\frac{1}{3})^2 |A| = \frac{1}{9} |A| \quad (*)$$

پس برای محاسبه خواسته سؤال، در ادامه اول a را ساده می کنیم، بعد $|A|$ را حساب می کنیم.

گام ۳۵ (ساده کردن a)

a را به کمک اتحاد مزدوج و ویژگی های لگاریتم تا جای ممکن ساده می کنیم:

$$a = \frac{(\log 25)^2 - (\log 4)^2}{\text{اتحاد مزدوج}} = (\log 25 + \log 4)(\log 25 - \log 4)$$

$$= \log 100 \times \log \frac{25}{4} = \log (\frac{5}{4})^2 \times \log 10^2 = (2 \log \frac{5}{4}) \times (2 \log 10) = 4 \log \frac{5}{4}$$

گام ۳۶ (محاسبه |A|)

حالا به کمک مورد (۱) درس نامه، دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{4}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix}$ را حساب می کنیم:

$$|A| = (10^{\frac{a}{4}} \times 10^{\frac{a}{2}}) - (2^{\frac{a}{2}} \times 5^{\frac{a}{2}}) = 10^{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}} - (2 \times 5)^{\frac{a}{2}} = 10^{\frac{3a}{4}} - 10^{\frac{a}{2}}$$

در ادامه $a = 4 \log \frac{5}{4}$ را در تساوی بالا جای گذاری می کنیم:

$$|A| = 10^{\frac{3}{4} (4 \log \frac{5}{4})} - 10^{\frac{1}{2} (4 \log \frac{5}{4})} = 10^{3 \log \frac{5}{4}} - 10^{2 \log \frac{5}{4}}$$

طبق قانون «پ» درس نامه به جای $2 \log \frac{5}{4}$ می توانیم $\log (\frac{5}{4})^2$ و به جای

$$3 \log \frac{5}{4}$$
 می توانیم $\log (\frac{5}{4})^3$ را جای گذاری کنیم:

$$|A| = 10^{\log_1 \frac{125}{8}} - 10^{\log_1 \frac{25}{4}}$$

در آخر به کمک قانون «ت» درس نامه، تساوی بالا را ساده می کنیم:

$$|A| = 10^{\log_1 \frac{125}{8}} - 10^{\log_1 \frac{25}{4}} = \frac{125}{8} - \frac{25}{4} = \frac{125}{8} - \frac{50}{8} = \frac{75}{8}$$

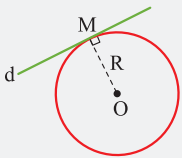
۳۶- گزینه ۳

درس نامه ۱ معادله گسترده هر دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز دایره در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

عدد ثابت معادله گسترده

فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که در معادله گسترده، ضرایب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ باشد. اگر معادله گسترده این شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.



۲ اگر خط d مثل شکل مقابل بر دایره $C(O, R)$ مماس باشد، می‌توانیم بگوییم فاصله مرکز دایره از خط d مساوی شعاع دایره است: $OH = R$

۳ معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به این صورت نوشته می‌شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

۴ برای به دست آوردن معادله وتر مشترک دو دایره، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

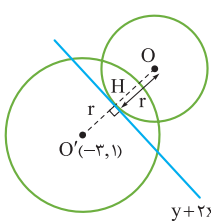
الف) چک می‌کنیم که ضرایب x^2 و y^2 در معادله گسترده‌شان ۱ باشد (اگر نبود این کار را انجام می‌دهیم).

ب) طرفین معادله‌های گسترده را از هم کم می‌کنیم.

۵ طول نقطه‌های برخورد دو دایره را می‌توانیم در دو مرحله به دست بیاوریم:

الف) معادله وتر مشترک دو دایره را پیدا می‌کنیم.

ب) معادله وتر مشترک را به صورت $y = \text{خط} + \text{خط}$ می‌نویسیم و در معادله یکی از دایره‌ها، جای‌گذاری می‌کنیم. جواب‌های معادله به دست آمده، طول نقاط برخورد دو دایره هستند. با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادله وتر مشترک، عرض نقاط تقاطع هم به دست می‌آیند.



۱ (پیدا کردن مرکز دایره بزرگ و شعاع دایره‌ها)

اول شکل فرضی مقابل را می‌کشیم.

سؤال معادله دایره بزرگ را به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ می‌شود. پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، مرکزش می‌شود:

$$O'(-\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}) = (-3, 1)$$

فرض می‌کنیم شعاع دایره کوچک r باشد، در این صورت چون خط آبی‌رنگ در شکل بالا بر این دایره مماس است، $OH = r$ می‌شود. از طرفی این خط آبی‌رنگ، عمودمنصف OO' است، پس می‌توانیم بگوییم $OH = O'H = r$ است. $O'H$ هم فاصله نقطه $O'(-3, 1)$ از خط $y + 2x = 0$ است که برابر می‌شود با:

$$O'H = \frac{|1 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

پس شعاع دایره کوچک شد: $OH = r = \sqrt{5}$

از طرفی سؤال می‌گوید، شعاع دایره کوچک، نصف شعاع دایره بزرگ است؛ پس اگر شعاع دایره بزرگ را R در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$r = \frac{R}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{5}$$

۲ (محاسبه a)

در گام قبلی دیدیم مرکز دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ نقطه $O'(-3, 1)$ و شعاعش $R = 2\sqrt{5}$ شد. معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y - a = 0$ می‌نویسیم تا بتوانیم شعاعش را به کمک مورد (۱) درس‌نامه برحسب a پیدا کنیم:

$$R = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-a)} = 2\sqrt{5}$$

عدد ثابت

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 - (-a)} \xrightarrow{\text{توان } 2} 20 = 10 + a \Rightarrow a = 10$$

۱۰ + a

پس معادله دایره بزرگ به این صورت می‌شود: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$

۲ زاویه بین دو بردار، عددی بین صفر تا 180° است.

۳ دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وقتی بر هم عمودند که ضرب داخلی‌شان صفر شود؛ یعنی $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد. برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد، می‌توانیم بگوییم بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۴ مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

۵ سه تا از قوانین مهم ضرب داخلی و خارجی بردارها را ببینید:

الف) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است، یعنی: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

ب) ضرب داخلی هر بردار در خودش مساوی مربع اندازه آن بردار است، یعنی: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

پ) در ضرب خارجی، ترتیب ضرب کردن مهم است، اما در ضرب داخلی نه:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

گام ۱ (محاسبه سینوس و کسینوس زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

به گفته سؤال، بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$ بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم ضرب داخلی‌شان را مساوی صفر بگذاریم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow -\frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow -2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

حالا فرض می‌کنیم زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، در این صورت به جای $\vec{a} \cdot \vec{b}$ در تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow -2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

در آخر به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درس‌نامه، $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ و در نتیجه

$$\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا به کمک مورد (۴) درس‌نامه، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای

$$\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \quad \text{و} \quad \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

ساخته می‌شود، حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S &= \left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \right| = \left| \frac{\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}| |\vec{b}|} \right| \\ &= \left| \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{2|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \end{aligned}$$

در آخر به جای $|\vec{a} \times \vec{b}|$ می‌نویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$:

$$S = \frac{2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha) = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{25}$$

مشاوره سؤال‌های هندسه دوازدهم در کنکورهای جدید بسیار پرمحاسبه شده‌اند، به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم با حل سؤال‌های این‌چنینی آمادگی خودتان را بالا ببرید.



طبق نکته قبلی، برای به دست آوردن مجموع طول نقطه‌های برخورد دو دایره (که همان ریشه‌های معادله (*) می‌شود)، فقط به ضریب x و x^2 احتیاج داریم، پس دیگر محاسبات اضافی روی معادله (*) انجام نمی‌دهیم:

$$x^2 + (4x^2 - 15x + 9) - 2x + 12x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{A}x^2 - \frac{5}{B}x + 0 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{B}{A} = -\frac{-5}{5} = 1$$



۳۷- گزینه ۲

گام ۱ به تیکه اول صورت سؤال توجه کنید:

«اگر عدد دورقمی aa را بین ارقام a و $2a$...»

همین‌جا می‌توانیم بگوییم چون $2a$ ، یک رقم است، پس:

$$1 \leq 2a \leq 9 \Rightarrow 0.5 \leq a \leq 4.5 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4$$

گام ۲ در صورتی که $a = 1$ باشد، یک عدد طبیعی، در صورتی که $a = 2$ و 3 باشد، دو

عدد طبیعی و در صورتی که $a = 4$ باشد، سه عدد طبیعی، a را عادی می‌کند؛ پس حداکثر ۳ عدد طبیعی a را عادی می‌کند.



۳۸- گزینه ۱

نکته استراتژی اول طرفین معادله را به پیمانه ۱۲۴ هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا y حذف

شود؛ بعد با حل معادله هم‌نهشتی حاصل، فرم کلی x را به دست می‌آوریم. در آخر به کمک فرم کلی x ، خواسته مسئله را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ (با a و b اعداد صحیح) (معادله سیاله خطی) می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر (یا a یا b) هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادله هم‌نهشتی برسیم.

ب) با حل معادله هم‌نهشتی، فرم کلی یکی از مجهول‌ها را به دست می‌آوریم.

پ) مجهول به دست آمده را در معادله سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲) اگر طرفین یک هم‌نهشتی به پیمانه m بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین هم‌نهشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \xrightarrow{(a, m)=d} x \equiv y$$

۳) هر هم‌نهشتی مثل $a \equiv b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم، ببینید:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم طرفین معادله سیاله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر

هم‌نهشت قرار دهیم؛ اما این‌جا سؤال مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سرقمی x را می‌خواهد و اصلاً به y کاری ندارد؛ پس طرفین معادله $76x + 124y = 364$ را به جای ۷۶

به پیمانه ۱۲۴ هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا x را به دست بیاوریم:

$$76x + 124y \equiv 364 \Rightarrow 76x \equiv 364 \xrightarrow{(4, 124)=4} 19x \equiv 91$$

$$\Rightarrow 19x \equiv 91 \Rightarrow -12x \equiv 91 \xrightarrow{(12, 19)=1} -x \equiv 5 \xrightarrow{\times(-1)} x \equiv -5$$

گام ۲ طبق مورد (۳) درس‌نامه، هم‌نهشتی بالا را می‌توانیم به تساوی تبدیل کنیم:

$$x = 31k - 5$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سرقمی x به ازای $k = 4$ به دست می‌آید:

$$x = 4(31) - 5 = 119$$

که مجموع ارقامش برابر $1+1+9=11$ است.



۳۹- گزینه ۲

متأسفانه این سؤال غلط است، چون بی‌شمار زوج مرتب مثل $(3k+1, 3k+2)$ وجود دارد که نه مجموع مؤلفه‌های اولشان مضرب ۳ است؛ نه مجموع مؤلفه‌های دومشان.

گام ۱ (پیدا کردن مختصات نقطه H)

همان‌طور که در شکل گام (۱)، H نقطه برخورد OO' و خط $y + 2x = 0$ است؛ پس برای به دست آوردن نقطه H ، اول باید معادله خط‌المركزین OO' را بنویسیم. خط‌المركزین OO' بر خط $y + 2x = 0$ عمود است، پس شیبشان قرینه معکوس هم است. اگر معادله خط $y + 2x = 0$ را به صورت $y = -2x$ بنویسیم، می‌بینیم که شیبش -2 است؛ بنابراین شیب خط OO' می‌شود $\frac{1}{2}$. حالا می‌توانیم بگوییم OO' از نقطه $O'(-3, 1)$ می‌گذرد و شیبش $\frac{1}{2}$ است، پس معادله‌اش به صورت زیر می‌شود:

$$OO': y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-3)) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}$$

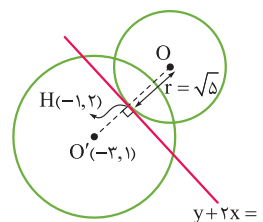
حالا با حل دستگاه زیر نقطه برخورد OO' و خط $y + 2x = 0$ را به دست می‌آوریم تا مختصات نقطه H معلوم شود:

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - پایینی}} -\frac{1}{2}x - 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = -1$$

$x = -1$ را در خط $y + 2x = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا عرض نقطه H هم به دست بیاید:

$$y + 2(-1) = 0 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین مختصات نقطه H به صورت $H(-1, 2)$ شد.



گام ۲ (نوشتن معادله دایره کوچک‌تر)

از دایره کوچک‌تر شعاعش را می‌دانیم ولی مرکزش را نه؛ فرض می‌کنیم مختصات مرکزش $O(\alpha, \beta)$ باشد. برای پیدا کردن α, β ، خوب به نقطه H و خط‌المركزین OO' در شکل مقابل توجه کنید.

نکته اگر مطابق شکل زیر، M وسط پاره‌خط AB باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$M = \frac{A+B}{2}$$

همان‌طور که می‌بینید $H(-1, 2)$ ، وسط پاره‌خط OO' است، پس طبق نکته بالا می‌توانیم بگوییم:

$$H = \frac{O+O'}{2} \Rightarrow (-1, 2) = \frac{(\alpha, \beta) + (-3, 1)}{2} \Rightarrow (-2, 4) = (\alpha - 3, \beta + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = -2 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \beta + 1 = 4 \Rightarrow \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow O(1, 3)$$

حالا که مرکز و شعاع دایره کوچک‌تر را داریم؛ می‌توانیم معادله‌اش را به کمک مورد (۳)

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

درس‌نامه بنویسیم:

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال)

در آخر محل تقاطع دو دایره را طبق مورد (۵) درس‌نامه در ۲ مرحله پیدا می‌کنیم:

♦ پیدا کردن معادله وترمشترک دو دایره: طبق مورد (۴) درس‌نامه معادله وترمشترک دایره‌های $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5) - (x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10) = 0 \Rightarrow -8x - 4y + 15 = 0 \Rightarrow y = -2x + \frac{15}{4}$$

♦ جای‌گذاری وترمشترک در معادله یکی از دایره‌ها: حالا $y = -2x + \frac{15}{4}$ را در معادله

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

(طول نقاط تقاطع) برسیم:

$$x^2 + (-2x + \frac{15}{4})^2 - 2x - 6(-2x + \frac{15}{4}) + 5 = 0 \quad (*)$$

نکته مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ به شرطی که

$$\Delta > 0 \text{ باشد برابر است با: } -\frac{B}{A}$$

گام



مشاوره مشابه این سؤال باز هم در کنکور آمده و از کتاب درسی طرح شده است. حتماً سؤال‌ها، مثال‌ها، تمرین‌ها و ... کتاب درسی را با دقت بخوانید.

فیزیک



درس نامه واپاشی α : پروتهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. واپاشی α با رابطه زیر بیان می‌شود:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\text{He}$$



گام ۱ گلوله A به مدت Δs حرکت می کند. جابه جایی گلوله A تا لحظه $t_1 = 5$ s را به دست می آوریم (در تمام مراحل جهت مثبت Y را رو به پایین و مکان اولیه گلوله ها را صفر در نظر گرفتیم).

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 + y_0 \xrightarrow[t_1=5s, y_0=0]{g=10m/s^2} y_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times (5)^2 = 125 \text{ m}$$

گلوله B، 2 s دیرتر از گلوله A رها شده است، پس وقتی Δs از حرکت گلوله A می گذرد، گلوله B، 3 s در حرکت بوده است. جابه جایی گلوله B تا لحظه $t_2 = 3$ s را به دست می آوریم.

$$y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + y_0 \xrightarrow[t_2=3s, y_0=0]{g=10m/s^2} y_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 45 \text{ m}$$

گام ۲ حالا فاصله دو گلوله را در لحظه ای که Δs از حرکت گلوله A (3 s) از حرکت گلوله B می گذرد، محاسبه می کنیم.

$$y_1 - y_2 = 125 - 45 = 80 \text{ m}$$

۴۸ - گزینه ۱

درس نامه ۱ تندی متوسط: نسبت مسافت طی شده به مدت زمان.

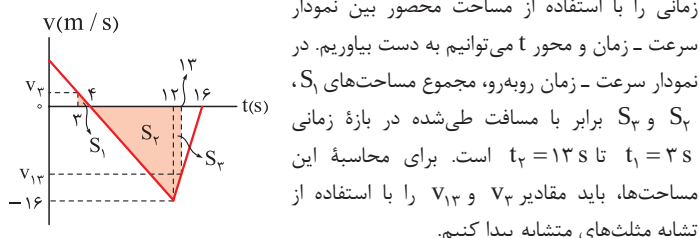
$$s_{av} = \frac{\ell \rightarrow (m)}{\Delta t \rightarrow (s)}$$

۲ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر مسافت طی شده توسط متحرک در آن بازه زمانی است. مثلاً در نمودار سرعت - زمان روبه رو، مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_2 به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} \ell_1 &= S_1 \text{ : مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا } t_1 \\ \ell_2 &= S_2 \text{ : مسافت طی شده در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \ell = \ell_1 + \ell_2 = S_1 + S_2 \text{ : مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا } t_2$$

گام ۱ برای این که تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3$ s تا $t_2 = 13$ s را به دست بیاوریم، به مسافت طی شده در این بازه زمانی نیاز داریم. مسافت طی شده در این بازه زمانی را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار



$$\frac{v_3}{4-3} = \frac{16}{12-4} \Rightarrow v_3 = 2 \text{ m/s}$$

$$\frac{|v_{13}|}{16-13} = \frac{16}{16-12} \xrightarrow{v_{13} < 0} v_{13} = -12 \text{ m/s}$$

گام ۲ حالا می توانیم مجموع مساحت های S_1 ، S_2 و S_3 را که برابر با مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3$ s تا $t_2 = 13$ s است، محاسبه کنیم.

$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{2 \times 3}{2} + \frac{16 \times 10}{2} + \frac{(16+12)(13-12)}{2} = 1 + 80 + 14 = 95 \text{ m}$$

گام ۳ در آخر، تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3$ s تا $t_2 = 13$ s را به دست می آوریم.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{95}{13-3} = 9.5 \text{ m/s}$$

تله اگر سرعت متوسط متحرک را به دست بیاورید، به گزینه نادرست ۲ می رسید.

۴۹ - گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد، آن گاه شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می آید.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

۴۵ - گزینه ۲

شفاف سازی در ابتدا ۶۰۰ گرم آب 20°C درون گرماسنج قرار دارد؛ بنابراین دمای اولیه گرماسنج هم 20°C است.

درس نامه ۱ طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) + m_3 c_3 (\theta - \theta_3) = 0$$

۲ رابطه بین ظرفیت گرمایی، جرم و ویژه ماده:

$$C = mc$$

گرمای مبادله شده ۶۰۰ گرم آب را Q_1 ، گرمای مبادله شده گرماسنج را Q_2 و گرمای مبادله شده ۴۰۰ گرم آب را Q_3 در نظر می گیریم. طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + C_{\text{گرماسنج}} (\theta - \theta_2) + m_2 c_2 (\theta - \theta_3) = 0$$

$$\Rightarrow 0/6c_{\text{آب}} \times (36-20) + C_{\text{گرماسنج}} (36-20) + 0/4c_{\text{آب}} (36-80) = 0$$

$$\Rightarrow 9/6c_{\text{آب}} - 16C_{\text{گرماسنج}} - 17/6c_{\text{آب}} = 0 \Rightarrow 16C_{\text{گرماسنج}} = 17/6c_{\text{آب}} - 9/6c_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow 16C_{\text{گرماسنج}} = 8c_{\text{آب}} \Rightarrow C_{\text{گرماسنج}} = 0/5c_{\text{آب}}$$

$$\xrightarrow[c_{\text{آب}}=4200]{J/kg.K} C_{\text{گرماسنج}} = 0/5(4200) = 2100 \text{ J/K}$$

۴۶ - گزینه ۴

استراتژی معادله مکان - زمان دو متحرک را بنویسید و ببینید معادله $x_2 - x_1 = \pm 5$ چند جواب دارد.

درس نامه ۱ معادله مکان - زمان متحرک در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

مکان اولیه (m)

$$x = vt + x_0$$

سرعت (m/s)

۲ معادله مکان - زمان متحرک در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

شتاب (m/s²) سرعت اولیه (m/s)

گام ۱ با توجه به شکل روبه رو، معادله مکان - زمان هر دو متحرک را می نویسیم.

$$\begin{aligned} v_{01} &= 0 \text{ m/s} & v_{02} &= 2 \text{ m/s}^2 \\ v_1 &= 8 \text{ m/s} & a_2 &= 2 \text{ m/s}^2 \\ x_1 &= v_1 t + x_{01} & x_2 &= \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{02} t + x_{02} \end{aligned} \xrightarrow[v_{01}=0]{v_1=8m/s} x_1 = 8t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{02} t + x_{02} \xrightarrow[x_{02}=7m, a_2=2m/s^2]{v_{02}=0m/s} x_2 = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 7 = t^2 + 7$$

گام ۲ برای این که ببینیم فاصله دو متحرک از یکدیگر چند بار ۵ متر می شود، باید ببینیم

$$x_2 - x_1 = \pm 5 \Rightarrow t^2 + 7 - 8t = \pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}, t_2 = 6 \text{ s} \\ t^2 - 8t + 2 = 0 \Rightarrow t_3 = (4 + \sqrt{14}) \text{ s}, t_4 = (4 - \sqrt{14}) \text{ s} \end{cases}$$

چهار ریشه مثبت داریم، پس فاصله این دو متحرک از یکدیگر، چهار بار به ۵ متر می رسد.

۴۷ - گزینه ۳

شفاف سازی گلوله B، 2 s دیرتر از گلوله A رها شده است، پس وقتی Δs از حرکت گلوله A می گذرد، گلوله B، 3 s در حرکت بوده است.

درس نامه معادله مکان - زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم):

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$



در شکل (ب)، موقعیت این دو متحرک در لحظه $t = 8$ s را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، متحرک A در مکان -96 m و در حال حرکت در خلاف جهت محور X و متحرک B در مکان -128 m تغییر جهت داده و در جهت محور X شروع به حرکت می‌کند.

گام ۵: حالا مکان دو متحرک A و B را در لحظه $t' = 10$ s به دست می‌آوریم.

$$x_A = t'^2 - 20t' \xrightarrow{t'=10s} x'_A = 10^2 - 20(10) = -100 \text{ m}$$

$$x_B = 2t'^2 - 32t' \xrightarrow{t'=10s} x'_B = 2(10)^2 - 32(10) = -120 \text{ m}$$

در شکل (ب)، موقعیت این دو متحرک در لحظه $t' = 10$ s را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، در بازه زمانی 8 s تا 10 s متحرک A از مکان -96 m به مکان -100 m و متحرک B از مکان -128 m به مکان -120 m جابه‌جا شده‌اند. با توجه به شکل (پ)، متحرک A، 4 m در خلاف جهت محور X و متحرک B، 8 m در جهت محور X در این بازه زمانی جابه‌جا شده‌اند.

در مجموع 12 m ($8 + 4$) به هم نزدیک شده‌اند.



گزینه ۲

گام ۵: شفاف‌سازی عدد $1/57$ به ما آلام می‌دهد که مقدار π را $3/14$ در نظر بگیریم.

درس‌نامه ۱: تندی متحرکی که بر روی دایره‌ای به شعاع r ، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \text{شعاع (m)} \rightarrow \text{تندی (m/s)}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

۲ اندازه شتاب مرکزگرا:

۳ حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه جسم می‌گوییم.

گام ۶: گلوله در هر $1/57$ s یک دور می‌زند، پس دوره تناوب آن $1/57$ s است ($T = 1/57$ s). با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، تندی گلوله را به دست می‌آوریم.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\pi=3/14, r=2 \text{ m}, T=1/57 \text{ s}} v = \frac{2 \times 3/14 \times 2}{1/57} = 8 \text{ m/s}$$

گام ۷: حالا می‌توانیم اندازه شتاب مرکزگرا را محاسبه کنیم.

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v=8 \text{ m/s}, r=2 \text{ m}} a_c = \frac{8^2}{2} = 32 \text{ m/s}^2 \quad (\text{۳ و ۴ پر})$$

گام ۸: در مدت نصف دوره، گلوله نیم دور می‌زند و جهت سرعت آن قرینه می‌شود. با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه تغییرات سرعت گلوله در نصف دوره را به دست می‌آوریم.

$$\Delta \vec{v} = -\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v} \Rightarrow |\Delta \vec{v}| = 2v = 2 \times 8 = 16 \text{ m/s}$$

گام ۹: حالا اندازه تغییر تکانه گلوله در مدت نصف دوره را محاسبه می‌کنیم.

$$|\Delta p| = m |\Delta v| \xrightarrow{m=0.5 \text{ kg}, |\Delta v|=16 \text{ m/s}} |\Delta p| = 0.5 \times 16 = 8 \text{ kg.m/s}$$



گزینه ۳

استراتژی شکل آسانسور، فنر و وزنه را رسم کنید و نیروهای وارد بر وزنه را مشخص کنید. سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، طول ثانویه فنر را به دست بیاورید.

درس‌نامه

۱ اندازه نیروی کشسانی فنر:

$$\text{ثابت فنر } \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$$

$$F_e = k \Delta \ell \rightarrow \text{تغییر طول فنر (m)}$$

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow \text{شتاب } (m/s^2) \leftarrow \text{نیروی خالص (N)}$$

$$\downarrow \text{جرم (kg)}$$

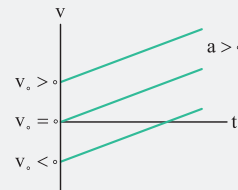
۲ قانون دوم نیوتون:

۲ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

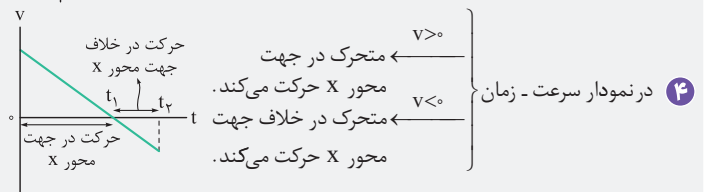
$$v = at + v_0$$

$$\text{شتاب } (m/s^2)$$

$$\text{سرعت اولیه } (m/s)$$



۳ نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت یک خط راست است.



گام ۱: ابتدا اطلاعاتمان را راجع به دو متحرک A و B کامل می‌کنیم. نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B به صورت یک خط راست است، پس حرکت این دو متحرک از نوع حرکت با شتاب ثابت است. با توجه به نمودار سرعت - زمان آن‌ها، شتاب متحرک A را محاسبه می‌کنیم.

$$a_A = a_{avA} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_A = \frac{0 - (-20)}{10 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

حالا که شتاب حرکت A را حساب کردیم، معادله سرعت - زمان آن را نیز می‌نویسیم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{a_A=2 \text{ m/s}^2, v_{0A}=-20 \text{ m/s}} v_A = 2t - 20$$

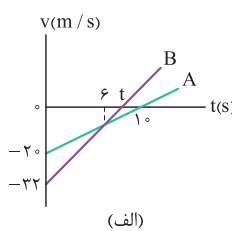
معادله سرعت - زمان متحرک B را نیز می‌نویسیم:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow{v_{0B}=-32 \text{ m/s}} v_B = a_B t - 32$$

با توجه به نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B، سرعت آن‌ها در لحظه $t = 6$ s یکسان شده است ($v_A = v_B$)؛ بنابراین با استفاده از معادله سرعت - زمان آن‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A = v_B \Rightarrow 2t - 20 = a_B t - 32 \xrightarrow{t=6s} 2(6) - 20 = 6a_B - 32 \Rightarrow 6a_B = 24 \Rightarrow a_B = 4 \text{ m/s}^2$$

گام ۲: شتاب متحرک B را هم پیدا کردیم. حالا به سراغ سؤال می‌رویم! سؤال راجع به بازه زمانی است که دو متحرک A و B در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، پس باید این بازه زمانی را پیدا کنیم. با توجه به شکل (الف)، سرعت متحرک B در لحظه t صفر می‌شود و متحرک B در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور X به حرکت خود ادامه می‌دهد. با استفاده از معادله سرعت - زمان متحرک B، لحظه t را به دست می‌آوریم.



$$v_B = 4t - 32 \xrightarrow{v_B=0 \text{ m/s}} 0 = 4t - 32 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

گام ۳: همان‌طور که در نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B می‌بینید (شکل الف)، در بازه زمانی $t = 8$ s تا $t' = 10$ s، متحرک B در جهت محور X و متحرک A در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، پس در این بازه زمانی این دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. حالا برای این که ببینیم فاصله این دو متحرک در این بازه زمانی چگونه تغییر می‌کند، ابتدا مکان هر یک از آن‌ها را در لحظه $t = 8$ s با استفاده از معادله مکان - زمان آن‌ها به دست می‌آوریم.

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t'^2 + v_{0A} t' + x_{0A}$$

$$\xrightarrow{a_A=2 \text{ m/s}^2, v_{0A}=-20 \text{ m/s}, x_{0A}=0 \text{ m}} x_A = \frac{1}{2} (2) t'^2 - 20 t' = t'^2 - 20 t'$$

$$\xrightarrow{t=8s} x_A = 8^2 - 20(8) = 64 - 160 = -96 \text{ m}$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t'^2 + v_{0B} t' + x_{0B}$$

$$\xrightarrow{a_B=4 \text{ m/s}^2, v_{0B}=-32 \text{ m/s}, x_{0B}=0 \text{ m}} x_B = \frac{1}{2} (4) t'^2 - 32 t' = 2t'^2 - 32 t'$$

$$\xrightarrow{t=8s} x_B = 2(8)^2 - 32(8) = 128 - 256 = -128 \text{ m}$$

۵۳- گزینه ۱

درس نامه مساحت محصور بین نمودار نیروی خالص و محور t در یک بازه زمانی، برابر با اندازه تغییرات تکانه در آن بازه زمانی است. اگر نمودار نیروی خالص بر حسب زمان بالای محور t باشد، تغییرات تکانه مثبت و اگر پایین محور t باشد، تغییرات تکانه منفی است. مثلاً در نمودار نیروی خالص بر حسب زمان روبه‌رو، تغییرات تکانه در بازه زمانی صفر تا t_p به صورت مقابل است.

تغییرات تکانه در بازه زمانی صفر تا t_1 : $\Delta p_1 = S_1$
 تغییرات تکانه در بازه زمانی t_1 تا t_p : $\Delta p_p = -S_p$
 تغییرات تکانه در بازه زمانی صفر تا t_p : $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_p = S_1 - S_p$

گام ۱ مجموع مساحت‌های S_1 ، S_p و S_3 برابر با تغییر تکانه جسم در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_p = 5s$ است؛ بنابراین مجموع این مساحت‌ها را به دست می‌آوریم.

$\Delta p = -S_1 + S_p + S_3 = -2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 3 = 3 \frac{kg \cdot m}{s}$

گام ۲ حالا تغییرات سرعت جسم در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_p = 5s$ را با استفاده از تغییر تکانه آن در این بازه زمانی محاسبه می‌کنیم.

$\Delta p = m \Delta v \Rightarrow 3 = \frac{500}{1000} \Delta v \Rightarrow \Delta v = 6 m/s$

گام ۳ در آخر، شتاب متوسط جسم در این بازه زمانی را به دست می‌آوریم.

$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{5-1} = 1.5 m/s^2$

۵۴- گزینه ۲

شفاف‌سازی باید طول موج امواج صوتی گسیل‌شده توسط تار یعنی طول موج در هوا را حساب کنیم.

درس نامه رابطه بین طول موج، تندی انتشار موج، دوره تناوب موج و بسامد موج:

تندی انتشار موج (m/s) : v
 دوره تناوب (s) : T
 بسامد (Hz) : f
 طول موج (m) : λ

رابطه‌ها: $v = \lambda f$, $T = \frac{1}{f}$, $\lambda = \frac{v}{f}$

وقتی موجی از یک محیط وارد یک محیط دیگر می‌شود، بسامد آن ثابت می‌ماند. با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته نشده که طول موج صوت هماهنگ چندم را می‌خواهیم، ما صوت اصلی را در نظر می‌گیریم.

$\lambda = \frac{v_{\text{صوت}}}{f} = \frac{340 m/s}{500 Hz} = 0.68 m = 68 cm$

تذکر: در صورت سؤال باید گفته می‌شد که صوت هماهنگ چندم مد نظر است. اگر صوت هماهنگ دوم مد نظر طراح بود، طول موج صوت گسیل‌شده به صورت زیر به دست می‌آمد.

$f_{\text{موج صوتی}} = f_{\text{چشمه}} = n f_1 = 2 \times 500 = 1000 Hz$
 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1000} = 0.34 m = 34 cm$

۵۵- گزینه ۱

شفاف‌سازی کدام بسامد از بسامدهای تشدیدی تار نیست، یعنی کدام بسامد مضرب درستی از بسامد اصلی نیست.

درس نامه ۱ بسامدهای تشدیدی تار مرتعش دو انتها بسته، مضارب درستی از بسامد اصلی تار هستند.

$f_n = n f_1$ بسامد تشدیدی هماهنگ n ام (Hz)
 f_1 بسامد تشدیدی هماهنگ اول (اصلی) (Hz)

یک شکل مناسب رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر وزنه را مشخص می‌کنیم. سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، طول ثانویه فنر را به دست می‌آوریم (جهت مثبت y را رو به بالا فرض کردیم):

$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - mg = -ma$
 $F_e = k \Delta \ell \Rightarrow k \Delta \ell = m(g - a)$

$k = 400 N/m, a = 2 m/s^2 \Rightarrow 400 \Delta \ell = 2(10 - 2) \Rightarrow \Delta \ell = \frac{24}{400} = 0.06 m = 6 cm$
 $\Delta \ell = \ell_p - \ell_1 \Rightarrow \ell_p - 42 = 6 \Rightarrow \ell_p = 48 cm$

۵۲- گزینه ۴

درس نامه پیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:

۱. ضربه اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح
 $f_{s, max} = \mu_s F_N$
 نیروی عمودی سطح (N)

۲. نیروی اصطکاک جنبشی:
 $f_k = \mu_k F_N$
 ضربه اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

گام ۱ در حالت اول، وقتی طول فنر به $47/5 cm$ می‌رسد، جسم شروع به حرکت می‌کند؛ بنابراین جسم در این لحظه در آستانه حرکت است. با استفاده از قانون دوم نیوتون، ضربه اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح را در این حالت به دست می‌آوریم (شکل (الف)).

$F_{net} = ma \xrightarrow{a=0 m/s^2} F_e - f_{s, max} = 0 \Rightarrow \frac{F_e = k \Delta \ell}{f_{s, max} = \mu_s F_N = \mu_s mg}$
 $k \Delta \ell = \mu_s mg \xrightarrow{k=400 N/m, \Delta \ell=47/5-40=7/5 cm=7/5 \times 10^{-2} m, m=5 kg}$
 $400 \times 7/5 \times 10^{-2} = \mu_s \times 5 \times g \Rightarrow \mu_s = \frac{30}{5g}$

گام ۲ طول فنر در حالت دوم نیز $47/5 cm$ است، با این تفاوت که جسم در این حالت با شتاب ثابت حرکت می‌کند. چون جسم در حال حرکت است، پس نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است؛ بنابراین با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم (شکل (ب)).

$F_{net} = ma \xrightarrow{a=2 m/s^2} F_e - f_k = ma$
 $\frac{F_e = k \Delta \ell}{f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg} \Rightarrow k \Delta \ell - \mu_k mg = ma$
 $k \Delta \ell = \mu_k mg + ma \xrightarrow{k=400 N/m, \Delta \ell=7/5 \times 10^{-2} m, m=5 kg}$
 $400 \times 7/5 \times 10^{-2} - \mu_k \times 5 \times g = 5 \times 2$
 $\Rightarrow 5g \mu_k = 20 \Rightarrow \mu_k = \frac{20}{5g}$

گام ۳ در آخر خواسته سؤال، یعنی نسبت ضربه اصطکاک ایستایی (μ_s) به ضربه اصطکاک جنبشی (μ_k) را به دست می‌آوریم.

$\frac{\mu_s}{\mu_k} = \frac{\frac{30}{5g}}{\frac{20}{5g}} = \frac{3}{2}$



با توجه به نکته قبلی، مسافت طی شده توسط ذره M را در بازه زمانی داده شده، محاسبه می کنیم (شکل پ).

$$\ell = 2A + \frac{A}{\gamma} = 2 / \Delta A \xrightarrow{A=2 \text{ mm}} \ell = 2 / \Delta \times 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

در آخر، تندی متوسط ذره M در بازه زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 0$ s را به دست می آوریم.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell=5 \times 10^{-3} \text{ m}, \Delta t=0.5 \text{ s}} s_{av} = \frac{5 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.01 \text{ m/s}$$

گزینه ۳ - ۵۷

درس نامه اختلاف تراز شدت دو صوت:

تراز شدت صوت (dB) $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \rightarrow (W/m^2)$ شدت صوت (dB) $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \rightarrow (W/m^2)$ شدت صوت (dB)

با توجه به رابطه اختلاف تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \frac{I_A}{I_B} \xrightarrow{\beta_A - \beta_B = 11.5 \text{ dB}} 11.5 = 10 \log \frac{I_A}{I_B}$$

$$\Rightarrow 1.15 = \log \frac{I_A}{I_B} \xrightarrow{1.15 = 1 + (\frac{1}{10} \times 0.15)} 1 + (\frac{1}{10} \times 0.15) = \log \frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10} = \log 10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 2 = \log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow \log 10 \sqrt{2} = \log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 10 \sqrt{2}$$

گزینه ۱ - ۵۸

شفاف سازی مقدار بیشینه انرژی پتانسیل کشسانی همان انرژی مکانیکی است.

درس نامه ۱ انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده:

جرم (kg) $E = 2\pi^2 m f^2 A^2 \rightarrow (m)$ دامنه (Hz) بسامد $E = U_{max} = K_{max} = K + U$ در رابطه بالا است.

بسامد زاویه ای (rad/s) $x = A \cos \omega t$ و $\omega = 2\pi f$ معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده:

دامنه (m)

گام ۱ انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده را به دست می آوریم.

$$E = K + U \xrightarrow{U = \frac{1}{2} U_{max} = \frac{1}{2} E} E = K + \frac{E}{2} \Rightarrow \frac{E}{2} = K$$

$$\xrightarrow{K = \frac{1}{2} \pi^2 J} \frac{E}{2} = 0.1 \pi^2 \Rightarrow E = 0.2 \pi^2 J$$

گام ۲ با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، دامنه نوسان را محاسبه می کنیم.

$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2 \xrightarrow{m=100 \text{ g}=0.1 \text{ kg}, f=20 \text{ Hz}, E=0.2 \pi^2 J} 0.2 \pi^2 = 2\pi^2 \times 0.1 \times (20)^2 \times A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{400} \Rightarrow A = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ m}$$

گام ۳ در آخر، معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده را با توجه به فرم کلی معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده می نویسیم.

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow{A=0.05 \text{ m}, \omega=2\pi f=40\pi \text{ rad/s}} x = 0.05 \cos 40\pi t$$

گزینه ۳ - ۵۹

درس نامه وقتی الکترونی در اتم هیدروژن از مدار بالاتر به مدار پایین تر منتقل می شود، موج الکترومغناطیسی تابش می کند. طول موج این موج الکترومغناطیسی از رابطه مقابل به دست می آید.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), n > n'$$

۲ در تار مرتعش دو انتها بسته، اختلاف دو بسامد تشدید متوالی برابر با بسامد تشدید هماهنگ اول است.

$$f_{n+1} - f_n = f_1$$

گام ۱ بسامد اصلی تار را با استفاده از اختلاف دو بسامد تشدید متوالی به دست می آوریم.

$$f_1 = f_{n+1} - f_n \Rightarrow f_1 = 280 - 240 = 40 \text{ Hz}$$

گام ۲ بسامدهای تشدید تار دو انتها بسته باید مضارب درستی از بسامد اصلی تار باشند؛ بنابراین بسامد ۶۰ Hz چون مضرب درستی از ۴۰ Hz نیست، نمی تواند بسامد تشدید تار باشد.

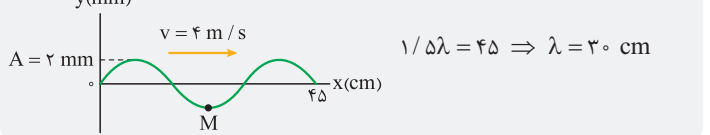
بررسی سایر گزینه ها:

$n = \frac{320}{40} = 8$ $n = \frac{160}{40} = 4$ $n = \frac{80}{40} = 2$

مشاوره مبحث بسامدهای تشدید تار مرتعش دو انتها بسته، جزء مباحث پرتکرار کنکورهای اخیر است. این مبحث ساده را از دست ندهید.

گزینه ۴ - ۵۶

شفاف سازی از روی نقش موج می توانیم دامنه و طول موج را به دست بیاوریم:



درس نامه شکل مقابل که فاصله نقاط را بر حسب طول موج نشان می دهد، به خاطر بسپارید.

گام ۱ با توجه به نمودار $y-x$ موج، طول موج و دامنه موج را پیدا می کنیم (شکل الف).

$$\frac{3}{2} \lambda = 45 \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$A = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

گام ۲ حالا دوره تناوب موج را محاسبه می کنیم.

$$\lambda = vT \xrightarrow{\lambda=0.3 \text{ m}, v=4 \text{ m/s}} 0.3 = 4 \times T \Rightarrow T = \frac{3}{40} \text{ s}$$

گام ۳ مسیر حرکت ذره M را با توجه به نکته زیر بررسی می کنیم.

نکته در نمودار $y-x$ ، وقتی جهت انتشار موج به سمت راست باشد، هر ذره در راستای قائم به سمت ذره قبل از خود (سمت چپ خود) حرکت می کند.

با توجه به نکته بالا، ذره M به سمت بالا حرکت می کند (شکل ب). بازه زمانی را بر حسب دوره تناوب به دست می آوریم (توجه کنید که دوره تناوب موج برابر با دوره تناوب هر یک از ذرات طناب است).

سمت چپ M از خودش بالاتر است؛ پس رو به بالا حرکت می کند. (ب)

$$\begin{cases} t_1 = 0 \text{ s} \\ t_2 = 0.5 \text{ s} = \frac{1}{2} \text{ s} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{1/2}{3/40} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{3} T = \frac{T}{3} + \frac{T}{6} \end{cases}$$

گام ۴

نکته مدت زمانی که طول می کشد تا نوسانگر هماهنگ ساده از انتهای پاره خط نوسان به فاصله $\frac{A}{\gamma}$ از انتهای پاره خط نوسان برسد، برابر با $\frac{T}{6}$ است.